



TUGAS AKHIR - SM 091332

ANALISA KUANTITATIF PADA MODEL INTERAKSI DINAMIS ANTARA VEKTOR LEPTOSPIROSIS DAN POPULASI MANUSIA

Fahmi Mutiara Yashinta
NRP 1210 100 019

Dosen Pembimbing
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2014



FINAL PROJECT - SM 091332

***QUANTITATIVE ANALYSIS ON DYNAMIC
INTERACTIONS MODELS BETWEEN
LEPSTOSPIROSIS INFECTED VECTOR AND
HUMAN POPULATION***

Fahmi Mutiara Yashinta
NRP 1210 100 019

Supervisor
Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
Drs. Lukman Hanafi, M.Sc

Departement of Mathematics
Faculty of Mathematics and Science
Sepuluh Nopember Institute of Technology
Surabaya 2014

LEMBAR PENGESAHAN

ANALISA KUANTITATIF PADA MODEL INTERAKSI DINAMIS ANTARA VEKTOR LEPTOSPIROSIS DAN POPULASI MANUSIA

QUANTITATIVE ANALYSIS ON DYNAMIC INTERACTIONS MODELS BETWEEN LEPTOSPIROSIS INFECTED VECTOR AND HUMAN POPULATION

TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Studi Pemodelan dan Simulasi Sistem
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh:

FAHMI MUTIARA YASHINTA
NRP. 1210 100 019

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II



Drs. Lukman Hanafi, M.Sc
NIP. 19640624 198803 1 001

Dosen Pembimbing I



Drs. M. Setijo Winarko, M.Si
NIP. 19640920 199002 1 002

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS



Dr. Erna Apriliani, M.Si
NIP. 19660414 199102 2 001
Surabaya, Agustus 2014

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis telah menyelesaikan Tugas Akhir berjudul “**Analisa Kuantitatif Pada Model Interaksi Dinamis Antara Vektor Leptospirosis dan Populasi Manusia**” sebagai syarat kelulusan dalam menempuh program S-1 Jurusan Matematika FMIPA ITS Surabaya.

Dalam proses pengerjaan Tugas Akhir ini penulis tak lupa menyampaikan ucapan terima kasih kepada seluruh pihak yang telah mendukung dan membantu sehingga laporan Tugas Akhir bisa terselesaikan, adapun pihak-pihak yang terlibat antara lain:

1. Ibu Dr. Erna Apriliani, M.Si selaku Ketua Jurusan yang memberikan dukungan dan kemudahan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.
2. Bapak Drs. M. Setijo Winarko, M.Si dan Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc. selaku dosen pembimbing yang senantiasa meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan, dukungan, dan motivasi dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
3. Bapak Prof. DR. Basuki Widodo, M.Sc, Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si, dan Bapak DR. Subiono, M.Sc selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan berupa kritik dan saran yang bersifat membangun guna kesempurnaan Tugas Akhir ini.
4. Ibu Dr. Mardlijah, MT selaku Ka. Lab. Pemodelan dan Simulasi Sistem yang telah mendukung penyusunan Tugas Akhir ini.
5. Bapak Drs. Chairul Imron, MI.Komp selaku koordinator Tugas Akhir yang telah memberi dukungan dalam penyelesaian Tugas Akhir ini.

6. Bapak Dr. Subchan, PhD. Selaku dosen wali yang selalu memberikan motivasi dan arahan untuk menjalani masa perkuliahan.
7. Bapak dan Ibu dosen serta seluruh staff Tata Usaha, Laboratorium, dan Ruang Baca Jurusan Matematika FMIPA-ITS.
8. Kedua orang tua dan adik penulis yang senantiasa memberikan dukungan moral maupun materi untuk pengerjaan Tugas Akhir ini.
9. Teman-teman arITSmatics, keluarga besar HIMATIKA ITS, teman-teman Departemen HUBLU HIMATIKA ITS 11/12, teman-teman Kementerian KESMA BEM FMIPA ITS 11/12, teman-teman Departemen DAGRI BEM FMIPA ITS 12/13, Kabinet Berwarna Untuk Merah Putih BEM FMIPA ITS 12/13, KESMA Family, Kabinet Muda Bersahabat BEM ITS 13/14 atas dukungan dan kebersamaannya.
10. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam pengerjaan Tugas Akhir ini yang tak dapat disebutkan namanya satu per satu.

Penulis menyadari bahwa laporan Tugas Akhir ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang sangat diharapkan dari semua pihak demi kesempurnaan laporan Tugas Akhir ini. Semoga laporan Tugas Akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca pada umumnya.

Surabaya, Agustus 2014

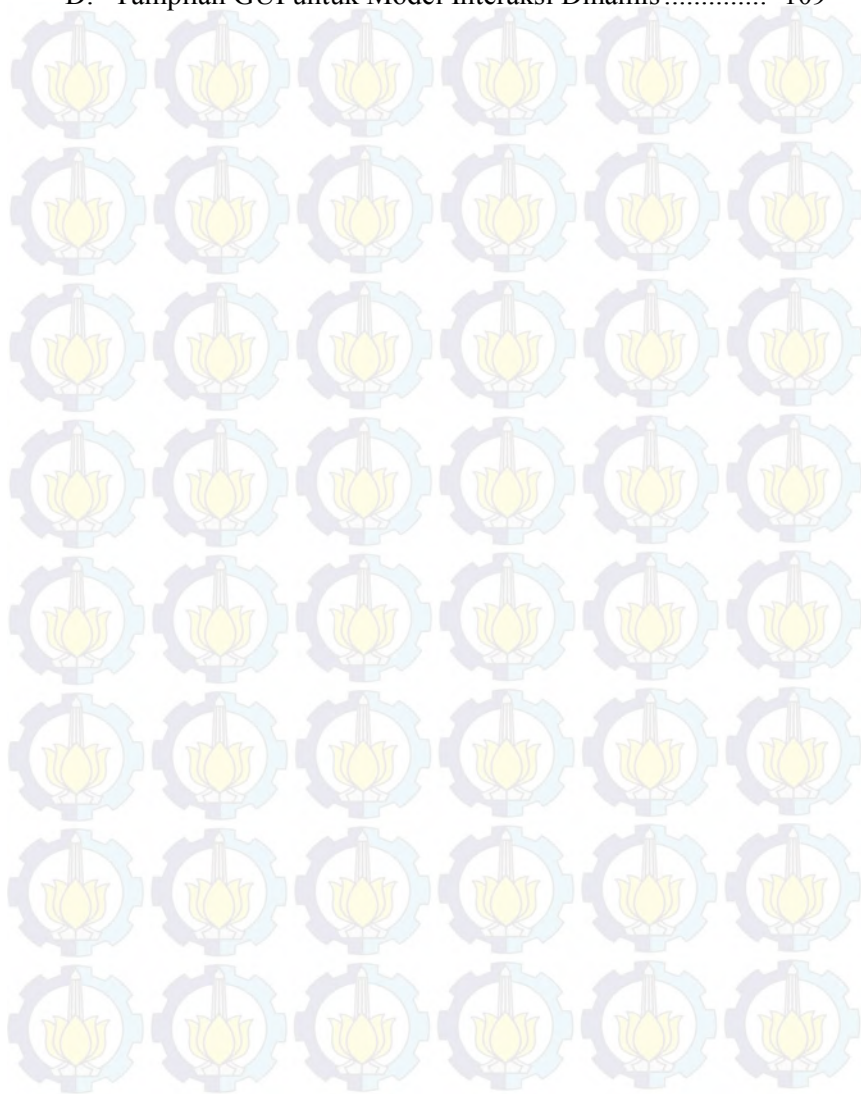
Penulis

DAFTAR ISI

| | |
|---|------|
| HALAMAN JUDUL | i |
| LEMBAR PENGESAHAN | v |
| ABSTRAK | vii |
| <i>ABSTRACT</i> | ix |
| KATA PENGANTAR | xi |
| DAFTAR ISI | xiii |
| DAFTAR GAMBAR | xvii |
| DAFTAR TABEL | xix |
| DAFTAR SIMBOL | xxi |
| BAB I PENDAHULUAN | |
| 1.1 Latar Belakang..... | 1 |
| 1.2 Rumusan Masalah..... | 2 |
| 1.3 Batasan Masalah..... | 2 |
| 1.4 Tujuan..... | 3 |
| 1.5 Manfaat..... | 3 |
| 1.6 Sistematika Penulisan..... | 4 |
| BAB II TINJAUAN PUSTAKA | |
| 2.1 Penelitian Terkait..... | 7 |
| 2.2 Penyakit Leptospirosis..... | 7 |
| 2.3 Sistem Kompartemen..... | 9 |
| 2.4 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)..... | 9 |
| 2.5 Kestabilan Titik Tetap..... | 10 |
| 2.6 Stabil Asimtotis Lokal..... | 10 |
| 2.6.1 Akar-Akar Karakteristik..... | 11 |
| 2.7 Linearisasi..... | 12 |
| 2.8 Bifurkasi..... | 14 |
| 2.9 Persamaan Diferensial..... | 15 |
| 2.9.1 Persamaan Diferensial Biasa dan Ordennya..... | 16 |
| 2.9.2 Persamaan Diferensial Biasa Linear dan Non Linear..... | 16 |
| 2.9.3 Persamaan Diferensial Terpisahkan..... | 17 |
| 2.9.4 Persamaan Diferensial Linear Orde Pertama..... | 17 |

| | |
|--|----|
| 2.10 Metode Runge-Kutta | 17 |
| 2.10.1 Metode Runge-Kutta 2 | 18 |
| 2.10.1 Metode Runge-Kutta 4 | 18 |
| BAB III METODOLOGI PENELITIAN | |
| 3.1 Studi Literatur | 19 |
| 3.2 Mengkaji Model Interaksi Dinamis | 19 |
| 3.3 Mencari Titik Keseimbangan, Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar, dan Bifurkasi | 19 |
| 3.4 Menganalisis Stabilitas Titik Keseimbangan | 19 |
| 3.5 Merumuskan Penyelesaian Numerik | 20 |
| 3.6 Membuat Simulasi | 20 |
| 3.7 Menarik Kesimpulan dan Saran | 20 |
| 3.8 Diagram Alir | 20 |
| BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN | |
| 4.1 Deskripsi Model dan Asumsi | 23 |
| 4.2 Daerah Penyelesaian Model | 27 |
| 4.3 Titik Keseimbangan Model Interaksi Dinamis | 31 |
| 4.3.1 Titik Keseimbangan Bebas Penyakit | 32 |
| 4.3.2 Titik Keseimbangan Endemik | 33 |
| 4.4 Kestabilan Lokal Interaksi Dinamis | 37 |
| 4.4.1 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit | 46 |
| 4.4.2 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Endemik | 57 |
| 4.5 Analisa Bifurkasi | 68 |
| 4.6 Solusi Numerik dan Simulasi | 76 |
| BAB V KESIMPULAN DAN SARAN | |
| 5.1 Kesimpulan | 89 |
| 5.2 Saran | 91 |
| DAFTAR PUSTAKA | 93 |
| LAMPIRAN | |
| A. Program GUI M-file untuk Kurva Bifurkasi | 95 |
| B. Program GUI M-file untuk Grafik Persebaran Populasi Individu | 96 |
| C. Program GUI M-file untuk Grafik Persebaran | |

| | |
|--|-----|
| Populasi <i>Vector</i> | 103 |
| D. Tampilan GUI untuk Model Interaksi Dinamis..... | 109 |





DAFTAR TABEL

| | | |
|-----------|---|----|
| Tabel 2.1 | Kriteria Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen..... | 14 |
| Tabel 4.1 | Keterkaitan Antara Perubahan Nilai Parameter Dengan Keeksistensian Bifurkasi | 76 |
| Tabel 4.2 | Syarat dan Kondisi Untuk Titik Keseimbangan Endemik Berdasarkan Nilai Akar Persamaan $f(I_h^*)$ | 83 |
| Tabel 4.3 | Nilai Awal Untuk persebaran Populasi Individu dan <i>Vector</i> | 84 |
| Tabel 4.4 | Nilai Parameter Untuk Persebaran Populasi dan <i>Vector</i> | 84 |



DAFTAR GAMBAR

| | | |
|-------------|---|-----|
| Gambar 2.1 | Siklus Penularan Leptospirosis..... | 8 |
| Gambar 2.2 | Bifurkasi Maju..... | 15 |
| Gambar 2.3 | Bifurkasi Mundur..... | 15 |
| Gambar 3.1 | Diagram Alir Penyelesaian Model Interaksi Dinamis..... | 21 |
| Gambar 4.1 | Diagram kompartemen Dari Model Interaksi Dinamis..... | 25 |
| Gambar 4.2 | Kurva Bifurkasi Dengan Parameter $b_1 = 19$, $b_2 = 45$, $\beta_1 = 0.002026$, $\beta_2 = 0.00009$, $\beta_3 = 0.00002$, $\delta_h = 0.002$, $\delta_v = 0.025$, $\gamma_h = 0.003$, $\gamma_v = 0.0036$, $\mu_h = 0.022$, dan $\mu_v = 0.0242$ | 71 |
| Gambar 4.3 | Kurva Bifurkasi Dengan $\beta_1 = 0.00195$ | 72 |
| Gambar 4.4 | Kurva Bifurkasi Dengan $\beta_1 = 0.0018$ | 73 |
| Gambar 4.5 | Kurva Bifurkasi Dengan $\beta_2 = 0.00008$ | 74 |
| Gambar 4.6 | Kurva Bifurkasi Dengan $\beta_2 = 0.000101593$ | 75 |
| Gambar 4.7 | Grafik Persebaran Populasi Individu Saat $N = 96$ | 85 |
| Gambar 4.8 | Grafik Persebaran Populasi <i>Vector</i> Saat $N = 96$ | 86 |
| Gambar 4.9 | Grafik Persebaran Populasi Individu Saat $N = 8400$ | 87 |
| Gambar 4.10 | Grafik Persebaran Populasi <i>Vector</i> Saat $N = 8400$ | 87 |
| Gambar D1 | Simulasi Kurva Bifurkasi..... | 109 |
| Gambar D2 | Simulasi Persebaran Populasi Individu..... | 110 |
| Gambar D3 | Simulasi Persebaran Populasi <i>Vector</i> | 111 |



Daftar Simbol

$S_h(t)$: individu yang rentan terhadap penyakit pada waktu t

$I_h(t)$: individu yang sudah terinfeksi penyakit pada waktu t

$R_h(t)$: individu yang sudah sembuh pada waktu t

$S_v(t)$: *vector* yang rentan terhadap penyakit pada waktu t

$I_v(t)$: *vector* yang sudah terinfeksi penyakit pada waktu t

b_1 : angka penyebaran populasi individu

b_2 : angka penyebaran populasi *vector*

β_1 : angka kejadian penularan melalui kontak langsung dengan individu yang terinfeksi

β_2 : angka kejadian penularan melalui kontak dengan *vector* yang terinfeksi

β_3 : angka *vector* yang terinfeksi pembawa penyakit per *host* per unit waktu

μ_h : angka kematian natural dari populasi individu

μ_v : angka kematian natural dari populasi *vector*

γ_h : angka individu yang sembuh

γ_v : angka kematian *vector*

δ_h : angka kematian dari individu yang terinfeksi akibat penyakit

δ_v : angka kematian dari *vector* yang terinfeksi akibat penyakit

λ_h : peluang terjadinya kesembuhan



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Leptospirosis (yang juga dikenal sebagai *Rat Catcher's Yellows*, demam Fort Bragg, *black jaundice*, dan demam pretibial) merupakan penyakit yang disebabkan oleh infeksi bakteri dari *Leptospira sp* yang mempengaruhi manusia serta hewan lainnya [1]. Infeksi sejenis ini biasanya terjadi di daerah industrialisasi perkotaan dan negara berkembang, maupun di daerah pedesaan di belahan dunia [2]. Biasanya penyakit ini banyak dijumpai di negara-negara yang beriklim tropis dan subtropis, namun kasus penyakit ini lebih banyak dijumpai di negara-negara beriklim tropis dan puncaknya terjadi pada musim hujan yang menimbulkan banjir. Penyakit ini utamanya beresiko terhadap individu yang bekerja di luar ruangan atau melakukan kontak dengan hewan yg berpotensi membawa infeksi Leptospirosis, seperti pembersih selokan, petani, dokter hewan, dan lain-lain [1].

Di Indonesia, angka kematian akibat Leptospirosis termasuk tinggi, mencapai 2,5-16,45 %. Pada usia lebih dari 50 tahun, kematian mencapai 56% . Biasanya penularan sering terjadi melalui tikus pada kondisi banjir. Banjir menyebabkan adanya perubahan lingkungan , seperti banyaknya genangan air, lingkungan menjadi becek, berlumpur, serta banyak timbunan sampah yang menyebabkan mudahnya bakteri *Leptospira* berkembang biak. Air kencing tikus terbawa banjir, kemudian masuk ke tubuh manusia melalui permukaan kulit yang terluka, selaput lender mata, dan hidung. Se jauh ini, tikus merupakan reservoir dan sekaligus penyebar utama Leptospirosis karena bertindak sebagai inang alami dan memiliki daya reproduksi tinggi. Beberapa hewan lain, seperti sapi, kambing, domba, kuda, babi, anjing, dapat terserang Leptospirosis, tetapi potensi untuk menularkan ke manusia tidak sebesar tikus [1].

Beberapa model telah menggambarkan kompartemental dinamik dari individu yang *susceptible* (rentan), *infected* (terinfeksi), *recovered* (sembuh). Selain itu, terdapat beberapa model yang membahas mengenai penyakit leptospirosis itu sendiri, diantaranya model yang dikemukakan oleh Pongsuumpun, dkk, Triampo, dkk, dan Gul Zaman [2].

Pada tugas akhir ini akan dibahas tentang analisa kualitatif pada model interaksi dinamik antara pembawa infeksi leptospirosis (tikus) dan populasi manusia dengan menganalisa titik kesetimbangan kemudian mencari kestabilan dan bifurkasinya. Selanjutnya merumuskan penyelesaian numerik dari model tersebut dan membuat simulasinya.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas pada proposal tugas akhir ini adalah :

1. Bagaimana menentukan kestabilan dari setiap titik kesetimbangan bebas penyakit pada model dengan interaksi dinamis?
2. Bagaimana menentukan bifurkasi, terutama bifurkasi mundur?
3. Bagaimana mensimulasikan model tersebut berdasarkan analisa yang dilakukan?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang akan diberikan pada tugas akhir ini adalah:

1. Menggunakan metode Runge-Kutta untuk menyelesaikan solusi numerik pada model dengan interaksi dinamis.
2. Model interaksi dinamis antara pembawa infeksi Leptospirosis dan populasi manusia adalah sebagai berikut:

$$(1.1) \begin{cases} \frac{dS_h}{dt} = b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h \\ \frac{dI_h}{dt} = \beta_2 S_h I_v + \beta_1 S_h I_h - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h \\ \frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h \\ \frac{dS_v}{dt} = b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h \\ \frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v \end{cases}$$

Dengan kondisi awal $S_h(0) \geq 0, I_h(0) \geq 0, R_h(0) \geq 0, S_v(0) \geq 0, I_v(0) \geq 0$.

1.4 Tujuan

Tujuan dalam proposal tugas akhir ini:

1. Mendapatkan analisa titik kesetimbangan dan kestabilan model interaksi dinamis antara penyebab infeksi leptospirosis (tikus) dan populasi manusia.
2. Mendapatkan solusi numerik pada model dengan interaksi dinamis.
3. Mendapatkan simulasi model berdasarkan hasil analisa yang diperoleh.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari tugas akhir ini adalah:

1. Mempelajari dinamika dampak dari interaksi antara tikus pembawa infeksi Leptospirosis dengan populasi manusia dan mendapatkan strategi untuk mengontrol penyakit sejenis ini.
2. Membantu menentukan cara yang efektif untuk mengontrol penyebaran penyakit Leptospirosis.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika dari penulisan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN

Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir ini yang meliputi latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini berisi tentang materi-materi yang mendukung Tugas Akhir ini, antara lain penelitian terkait, penyakit Leptospirosis, sistem kompartemen, bilangan reproduksi dasar, kestabilan titik tetap, stabil asimtotis lokal, bifurkasi, dan metode Runge-Kutta.

BAB III METODOLOGI PENELITIAN

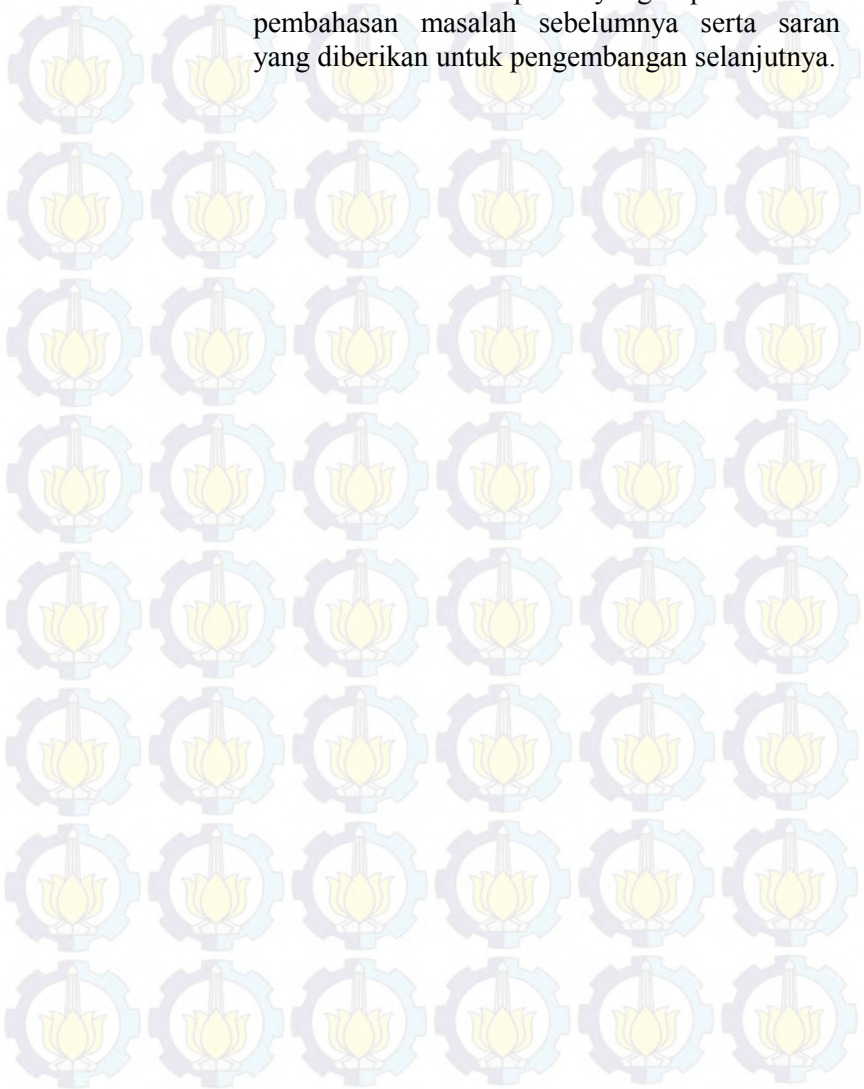
Pada bab ini dibahas tentang langkah – langkah dan metode yang digunakan untuk menyelesaikan tugas akhir ini.

BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini akan menguraikan bagaimana memperoleh daerah penyelesaian model, kestabilan lokal di setiap titik kesetimbangan, analisa bifurkasi berdasarkan bilangan reproduksi dasar, solusi numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta, dan simulasi dari model tersebut.

BAB V KESIMPULAN

Bab ini berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan masalah sebelumnya serta saran yang diberikan untuk pengembangan selanjutnya.





BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terkait [2]

Beberapa model telah mengemukakan penggambaran kompartemental dinamik dari individu yang *susceptible* (rentan), *infected* (terinfeksi), *recovered* (sembuh). Selain itu, terdapat beberapa model yang membahas mengenai penyakit leptospirosis itu sendiri, diantaranya model yang dikemukakan oleh Pongsuumpun, dkk, Triampo, dkk, dan Gul Zaman.

Pongsuumpun, dkk membangun model matematika untuk mempelajari perilaku dari transmisi penyakit leptospirosis. Mereka meformulasikan model dengan melihat angka perubahan dari individu dan tikus. Kemudian individu dibagi menjadi dua kelompok, yaitu remaja dan dewasa, selanjutnya kelompok tersebut dibagi menjadi kelompok *susceptible*, *infected*, dan *recovered*. Sedangkan, untuk tikus dibagi menjadi kelompok *susceptible* dan *infected*.

Triampo, dkk menunjukkan model deterministik untuk transmisi dari penyakit leptospirosis yang hanya menyebar pada populasi di Thailand. Model SIR yang digabungkan dengan ciri-ciri penyakit ini diaplikasikan ke data epidemiological di Thailand dan disajikan dalam bentuk simulasi numerik.

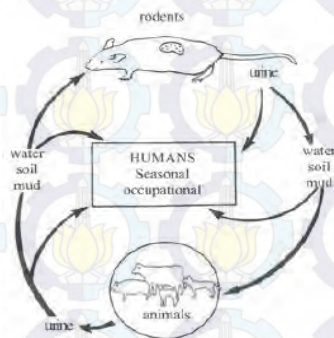
Gul Zaman mempertimbangkan data real yang digunakan oleh Triampo, dkk untuk mempelajari perilaku dinamis dan peranan teori kontrol optimal pada penyakit leptospirosis.

2.2 Penyakit Leptospirosis

Leptospirosis merupakan penyakit yang bertransmisi dari hewan ke manusia dan begitu juga sebaliknya (*zoonosis*). Leptospirosis merupakan penyakit yang dapat ditularkan melalui air (*water borne disease*). Urin (air kencing) dari individu yang terserang penyakit ini merupakan sumber utama penularan, baik pada manusia maupun pada hewan. Kemampuan *Leptospira* untuk bergerak dengan cepat

dalam air menjadi salah satu faktor penentu utama ia dapat menginfeksi induk semang (*host*) yang baru. Hujan deras akan membantu penyebaran penyakit ini, terutama di daerah banjir. Gerakan bakteri memang tidak memengaruhi kemampuannya untuk memasuki jaringan tubuh namun mendukung proses invasi dan penyebaran di dalam aliran darah induk semang [1].

Bentuk penularan *Leptospira* dapat terjadi secara langsung dari penderita ke penderita dan tidak langsung melalui melalui suatu media. Penularan langsung terjadi melalui kontak dengan selaput lender (mukosa), mata (konjungtiva), kontak di kulit, mulut, cairan urin, kontak seksual, dan cairan abortus (gugur kandungan). Sedangkan, penularan dari manusia ke manusia jarang terjadi. Penularan tidak langsung terjadi melalui kontak hewan atau manusia dengan barang-barang yang telah tercemar urin penderita, misalnya alas kandang hewan, tanah, makanan, minuman, dan jaringan tubuh. Kejadian leptospirosis pada manusia banyak ditemukan pada pekerja pembersih selokan, karena selokan banyak tercemar bakteri *Leptospira*. Umumnya penularan lewat mulut dan tenggorokkan sedikit ditemukan karena bakteri tidak tahan terhadap lingkungan asam [1].



Gambar 2.1 Siklus Penularan Leptospirosis

Gambaran klinis leptospirosis dibagi atas 3 fase yaitu : fase leptospiremia, fase imun dan fase penyembuhan.

a. Fase Leptospiremia

Demam mendadak tinggi sampai menggigil disertai sakit kepala, nyeri otot, hiperaesthesia pada kulit, mual muntah, diare, bradikardi relatif, ikterus, injeksi silier mata. Fase ini berlangsung 4-9 hari dan berakhir dengan menghilangnya gejala klinis untuk sementara.

b. Fase Imun

Dengan terbentuknya IgM dalam sirkulasi darah, sehingga gambaran klinis bervariasi dari demam tidak terlalu tinggi, gangguan fungsi ginjal dan hati, serta gangguan hemostatis dengan manifestasi perdarahan spontan.

c. Fase Penyembuhan

Fase ini terjadi pada minggu ke 2 - 4 dengan patogenesis yang belum jelas. Gejala klinis pada penelitian ditemukan berupa demam dengan atau tanpa muntah, nyeri otot, ikterik, sakit kepala, batuk, hepatomegali, perdarahan dan menggigil serta splenomegali. [3]

2.3 Sistem Kompartemen

Sistem kompartemen merupakan sebuah susunan kerja atau proses yang menunjukkan aliran individu dari satu kompartemen ke kompartemen lainnya seperti saat individu tersebut sehat, tertular penyakit atau sembuh dari penyakit [4].

2.4 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Untuk mengetahui tingkat penyebaran suatu penyakit diperlukan suatu parameter tertentu. Parameter yang biasa digunakan adalah Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*).

Bilangan Reproduksi Dasar adalah bilangan yang menyatakan banyaknya rata-rata individu infeksi sekunder akibat tertular individu infeksi primer yang berlangsung didalam populasi *susceptible*. Namun adapula yang mengartikan rasio atau

perbandingan yang menunjukkan jumlah individu *susceptible* yang menderita penyakit yang diakibatkan oleh satu individu *infected*.

Jika model hanya mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik, maka tidak terjadi endemik jika $R_0 < 1$ dan terjadi endemik jika $R_0 > 1$ [5].

Secara matematik, bilangan reproduksi dasar dapat diperoleh dengan menentukan nilai eigen (nilai karakteristik) dari matriks jacobian yang dihitung pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Pada model kompleks, suatu model mungkin mempunyai lebih dari satu bilangan reproduksi dasar. Untuk kasus seperti ini, bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai nilai terbesar dari beberapa bilangan reproduksi dasar [4].

2.5 Kestabilan Titik Tetap[6]

Persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \text{ dan } \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (2.1)$$

Sebuah titik (\bar{x}_0, \bar{y}_0) merupakan titik kesetimbangan dari Persamaan (2.1) jika memenuhi $f(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ dan $g(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan.

$x(t) = \bar{x}_0$ dan $y(t) = \bar{y}_0$ merupakan penyelesaian kesetimbangan dari Persamaan (2.1) untuk semua t .

2.6 Stabil Asimtotis Lokal [6]

Kestabilan asimtotis lokal pada titik keseimbangan ditentukan oleh tanda pada bagian real dari akar-akar karakteristik sistem.

Teorema 2.1 :

Titik setimbang (\bar{x}_0, \bar{y}_0) stabil asimtotis jika dan hanya jika nilai karakteristik dari

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

mempunyai tanda negatif pada bagian realnya dan tidak stabil jika sedikitnya satu dari nilai karakteristik mempunyai tanda positif pada bagian realnya.

2.6.1 Akar-akar Karakteristik

Dari matriks Jacobian yang dihitung di sekitar titik kesetimbangan didapatkan akar-akar karakteristik sistem.

Definisi 2.1

Jika J adalah matriks yang berukuran $n \times n$ maka vektor tak nol dinamakan vektor karakteristik dari J jika memenuhi :

$$Jx = \lambda x \quad (2.2)$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai karakteristik dari J dan x dikatakan vektor karakteristik yang bersesuaian dengan λ . Untuk mencari nilai karakteristik matrik J yang berukuran $n \times n$, maka persamaan (2.2) dapat ditulis:

$$(J - \lambda I)x = 0 \quad (2.3)$$

(2.3) mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika

$$|J - \lambda I| = 0 \quad (2.4)$$

Jika matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka persamaan (2.4) dapat ditulis

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

atau

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0$$

Akar-akar karakteristik

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(-a - d)^2 - 4(ad - bc)}}{2}$$

Sifat stabilitas titik setimbang berdasarkan tanda bagian real dibagi menjadi 3 yaitu:

1. Stabil
Titik setimbang dikatakan stabil jika dan hanya jika akar karakteristik mempunyai bagian real yang bernilai negatif atau mempunyai bagian real tak positif.
2. Stabil asimtotis
Titik setimbang dikatakan stabil asimtotis jika dan hanya jika akar karakteristik mempunyai bagian real negatif.
3. Tidak stabil
Titik setimbang dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat sedikitnya satu akar karakteristik yang mempunyai bagian positif.

Teorema 2.2

Titik setimbang (\bar{x}_0, \bar{y}_0) stabil asimtotis jika dan hanya jika akar karakteristik matriks $J = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mempunyai bagian real negatif dan tidak stabil jika sedikitnya satu akar karakteristik mempunyai bagian real positif.

2.7 Linearisasi Sistem [5]

Linearisasi sistem adalah metode yang lebih mudah untuk menentukan kestabilan suatu sistem dengan menyelidiki pengaruh perubahan kecil pada syarat awal.

Jika titik (x_0, y_0) adalah titik kesetimbangan maka diselidiki pengaruh perubahan kecil pada titik kesetimbangan tersebut. Jika titik (x, y) merupakan titik di sekitar titik kesetimbangan maka secara matematis titik (x, y) dapat diekspresikan sebagai

$$(x, y) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y).$$

Pendekatan fungsi $f_1(x, y)$ dan $f_2(x, y)$ dapat ditentukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor,

$$\begin{aligned}
 f_1(x, y) &\approx f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) \\
 &\quad + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) \\
 f_2(x, y) &\approx f_2(x_0, y_0) + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) \\
 &\quad + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0).
 \end{aligned}$$

Karena (x_0, y_0) adalah titik kesetimbangan maka $f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0) = 0$. Oleh karena itu, sistem (2.4) dapat didekati sebagai sistem linear

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y \\
 \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y
 \end{aligned}$$

Sistem linear di atas dapat disajikan dalam bentuk matriks

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \\
 &= J(x) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Matriks $J(x)$ pada sistem (2.5) merupakan matriks Jacobian.

Sedangkan untuk kriteria kestabilan dari sistem (2.5) dapat ditentukan dengan mencari nilai eigen dari matriks $J(x)$. Kriteria kestabilan dari sistem (2.5) berdasarkan nilai eigen matriks Jacobian $J(x)$ disajikan dalam Tabel (2.1).

| Nilai Eigen | Nama | Kestabilan |
|---|--------|--|
| Real, tidak sama, bertanda sama | simpul | Stabil asimtotis : semuanya negatif Tidak stabil : semuanya positif |
| Real, tidak sama, berlawanan tanda | sadel | Tidak stabil |
| Real, sama | simpul | Stabil asimtotis : semuanya negatif Tidak stabil : jika semuanya positif |
| Kompleks conjugate bukan imajiner murni | spiral | Stabil asimtotis : bagian real negatif Tidak stabil : bagian real positif |
| Imajiner murni | pusat | Stabil |

Tabel 2.1 Kriteria Kestabilan Berdasarkan Nilai Eigen

Tabel 2.1 menunjukkan bahwa sistem akan stabil asimtotis jika kedua nilai eigen matriks Jacobian berupa bilangan real negatif atau bilangan kompleks dengan bagian real bernilai negatif. Jika salah satu atau kedua nilai eigen berupa bilangan real positif atau bilangan kompleks dengan bagian real bernilai positif maka sistem akan tidak stabil.

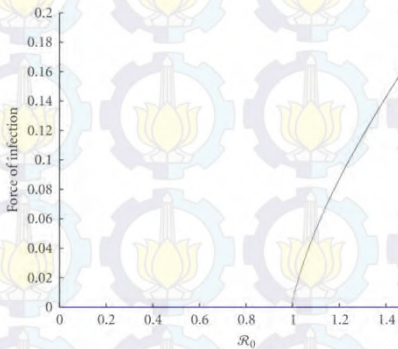
2.8 Bifurkasi [7]

Pada sistem dinamik non linear sering dijumpai kestabilan di sekitar titik kesetimbangan suatu sistem persamaan yang mana akan membantu dalam analisa bifurkasi. Bifurkasi secara umum adalah perubahan kualitatif yang meliputi perubahan stabilitas dan perubahan banyaknya titik kesetimbangan karena perubahan nilai - nilai parameter. Dalam epidemiologi, fenomena bifurkasi berhubungan dengan

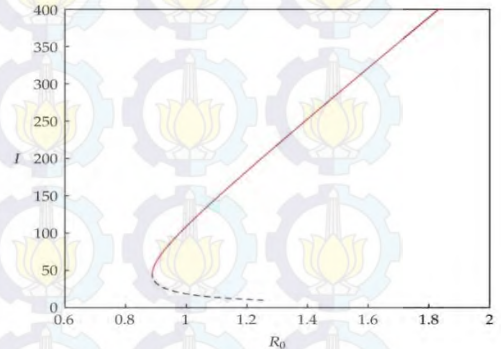
parameter ambang batas, yang paling umum merupakan bilangan reproduksi dasar yang disimbolkan dengan R_0 .

Ada dua jenis bifurkasi dalam model penyebaran penyakit menular yaitu bifurkasi maju dan bifurkasi mundur. Eksistensi bifurkasi maju dan mundur pada model penyebaran penyakit ditunjukkan oleh diagram bifurkasi pada Gambar 2.3 dan Gambar 2.4 dengan R_0 merupakan parameter bifurkasi dan I merupakan populasi individu yang terinfeksi penyakit.

Fenomena bifurkasi maju terjadi pada saat $R_0 > 1$ dimana hanya ada satu titik kesetimbangan endemik. Sedangkan fenomena bifurkasi mundur terjadi pada saat $R_0 < 1$ mempunyai dua titik kesetimbangan endemik.



Gambar 2.2 *Bifurkasi Maju*



Gambar 2.3 *Bifurkasi Mundur*

2.9 Persamaan Diferensial [8]

Persamaan diferensial adalah suatu bentuk persamaan yang memuat derivatif (turunan) satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas suatu fungsi.

Contoh:

Berikut merupakan contoh persamaan diferensial.

1.
$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

$$2. \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

2.9.1 Persamaan Diferensial Biasa dan Ordenya

Persamaan diferensial biasa merupakan sebuah bentuk persamaan yang memuat turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas suatu fungsi.

Penentuan order suatu persamaan diferensial tergantung pada kandungan fungsi turunan di dalam persamaan diferensial tersebut. Order atau tingkat suatu persamaan diferensial merupakan pangkat tertinggi turunan dalam persamaan diferensial.

Contoh:

1. $y' = \sin x + \cos x$ (persamaan diferensial biasa order pertama)
2. $y'' + 3y' - 4y = 0$ (persamaan diferensial biasa order kedua)

2.9.2 Persamaan Diferensial Biasa Linear dan Non Linear

Persamaan diferensial biasa linear order n dapat dituliskan sebagai

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)y = b(x)$$

Dengan $a_0 \neq 0$.

Persamaan diferensial biasa non linear jika persamaan diferensial tersebut tak linear dan terdapat perkalian variabel bergantung dengan turunannya.

Contoh:

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 4y = 0$ (PD linear orde dua)
2. $\left(\frac{d^4 y}{dx^4}\right)^2 + x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^3 \frac{dy}{dx} = xe^x$ (PD non linier orde empat)

2.9.3 Persamaan Diferensial Terpisahkan

Terdapat persamaan diferensial order pertama yang dapat direduksi menjadi:

$$g(y)y' = f(x)$$

dengan $y' = \frac{dy}{dx}$, sehingga $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$.

Persamaan $g(y)dy = f(x)dx$ merupakan persamaan diferensial terpisahkan. Bentuk $g(y)dy = f(x)dx$ adalah cara lain untuk menuliskan persamaan diferensial $g(y)y' = f(x)$. Persamaan $g(y)y' = f(x)$ disebut persamaan diferensial dengan peubah-peubah terpisahkan atau persamaan diferensial terpisahkan.

Persamaan diferensial di atas, kemudian dikenakan operasi integral dan didapat

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

Jika fungsi-fungsi f dan g kontinu, maka nilai integralnya ada dan hasil integralnya merupakan penyelesaian persamaan diferensial tersebut.

2.9.4 Persamaan Diferensial Linear Orde Pertama

Bentuk Umum:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

disebut persamaan diferensial linear order pertama, y dan y' bersifat linear sedangkan $p(x)$ dan $q(x)$ sebarang fungsi dalam x . Jika $q(x) = 0$,

$$y' + p(x)y = 0$$

disebut persamaan diferensial linear homogen. Jika $q(x) \neq 0$, maka

$$y' + p(x)y = q(x)$$

disebut persamaan diferensial linear tak homogen.

2.10 Metode Runge-Kutta [9]

Metode Runge-Kutta merupakan pengembangan dari metode Euler, dimana perhitungan penyelesaian dilakukan step demi step. Untuk fungsi dari persamaan differensial :

$$y' = f(x, y)$$

Dengan titik pendekatan awal x_0, y_0 , berdasarkan metode Euler nilai fungsi penyelesaian diperoleh dengan:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

2.10.1 Metode Runge-Kutta 2

Metode Runge-Kutta membuat step yang lebih kecil dari perubahan nilai dengan membagi nilai perubahan tiap step menjadi sejumlah bagian yang ditentukan, bentuk paling sederhana dari metode Runge Kutta ini adalah membagi bagian perubahan menjadi dua bagian sehingga :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$$

2.9.2 Metode Runge Kutta 4

Bila pada metode Runge-Kutta 2, nilai koefisien perbaikannya adalah dua buah, maka pada metode ini menggunakan empat nilai koefisien perbaikan yaitu k_1, k_2, k_3 , dan k_4 yang diberikan sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

dengan

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$$

BAB III

METODE PENELITIAN

Bab ini menguraikan metode yang akan digunakan dalam penelitian secara rinci. Metodologi penelitian yang digunakan berguna sebagai acuan sehingga penelitian ini dapat berjalan secara sistematis.

3.1 Studi Literatur

Tahap ini merupakan tahap untuk melakukan identifikasi permasalahan, yaitu mencari referensi yang menunjang penelitian. Referensi bisa berupa tugas akhir, jurnal, buku, maupun artikel terkait.

3.2 Mengkaji Model Interaksi Dinamis

Untuk memahami model interaksi dinamik disusun asumsi-asumsi tertentu sehingga dapat dibuat model kompartemen dengan *susceptible*, *infectious*, dan *recovered* untuk populasi manusia dan *susceptible* dan *infectious* untuk populasi tikus.

3.3 Mencari Titik Keseimbangan, Menentukan Bilangan Reproduksi Dasar dari Model, dan Bifurkasi

Dari model interaksi dinamis akan dicari titik keseimbangan bebas penyakit ($I = 0$) dan titik keseimbangan endemik ($I \neq 0$) melalui substitusi persamaan model. Kemudian menentukan nilai bilangan reproduksi dasar (R_0) melalui $f(I_h^*)$ dan selanjutnya menentukan kurva bifurkasi melalui nilai R_0 .

3.4 Menganalisis Stabilitas Titik Keseimbangan

Dari model interaksi dinamis akan dicari matriks Jacobiannya. Kemudian mensubstitusikan nilai titik kesetimbangannya (bebas penyakit atau endemik). Selanjutnya mencari persamaan karakteristik model melalui matriks Jacobian yang sudah disubstitusikan dengan titik kesetimbangan untuk mencari nilai eigen dan dari nilai eigen

tersebut akan dianalisa apakah titik kesetimbangan (bebas penyakit maupun endemik) model stabil atau tidak?

3.5 Merumuskan Penyelesaian Numerik

Merumuskan penyelesaian numerik pada model interaksi dinamis dengan menggunakan metode Runge-Kutta.

3.6 Membuat Simulasi

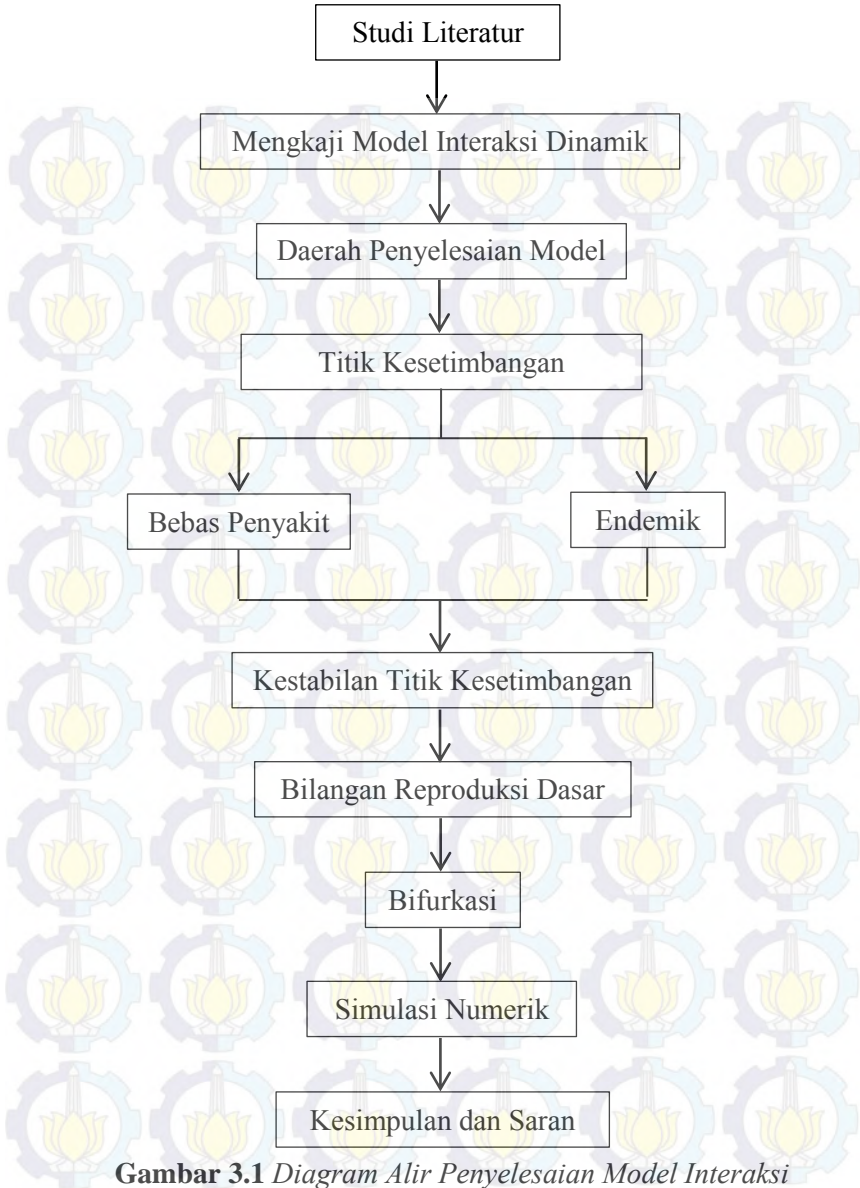
Dari bifurkasi dan hasil solusi numerik, akan dibuat simulasi dengan menggunakan MATLAB R2010a.

3.7 Menarik Kesimpulan dan Saran, serta Menyusun Laporan Tugas Akhir

Pada tahap terakhir ini dilakukan penarikan simpulan dari hasil pembahasan sebelumnya. Selanjutnya diberikan saran untuk perbaikan pada penelitian berikutnya.

3.8 Diagram Alir

Diagram alir dimaksudkan untuk memudahkan dalam mencapai tujuan penelitian yang telah disebutkan sebelumnya, agar sistem pengerjaannya lebih sistematis. Diagram alir yang digunakan pada penelitian ini ditunjukkan oleh Gambar 3.1



Gambar 3.1 Diagram Alir Penyelesaian Model Interaksi Dinamis



BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, akan dibahas tentang daerah penyelesaian model, titik kesetimbangan bebas penyakit, titik kesetimbangan endemik, kemudian akan dicari kestabilan lokal dari setiap titik kesetimbangan tersebut, dan menentukan bifurkasinya (bifurkasi mundur) berdasarkan nilai bilangan reproduksi dasar. Selanjutnya akan ditentukan penyelesaian solusi numerik dari model dan mensimulasikannya dengan menggunakan MATLAB.

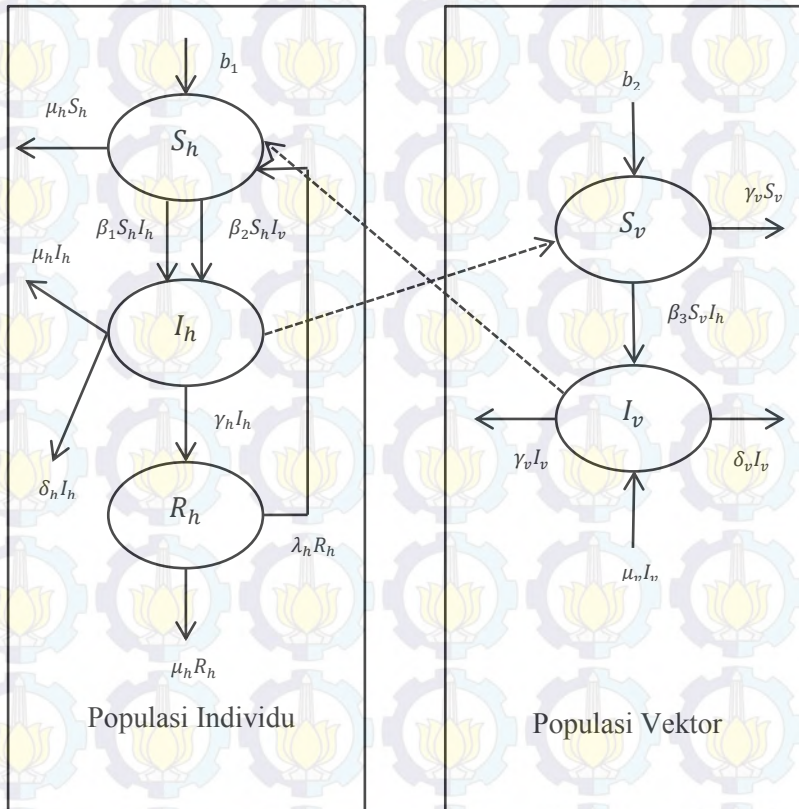
4.1 Deskripsi Model dan Asumsi

Model interaksi dinamis yang akan dibahas pada Tugas Akhir ini memiliki asumsi sebagai berikut:

1. Model merupakan kombinasi dua model non linear dari populasi individu dan vektor (tikus).
2. Model mendiskripsikan interaksi antara individu yang rentan terhadap vektor pembawa infeksi dan penyakit yang berkaitan dengan angka kematian yang disebabkan karena kontak dengan individu maupun vektor yang terinfeksi penyakit Leptospirosis.
3. Individu yang rentan terhadap penyakit dapat terinfeksi melalui dua cara, yaitu melakukan kontak langsung dengan individu yang sudah terinfeksi penyakit (β_1) dan melakukan kontak dengan vektor (β_2).
4. Individu dikelompokkan menjadi tiga kelompok, yaitu *susceptibel* (individu yang rentan terhadap penyakit pada t waktu ($S_h(t)$)), *infectious* (individu yang terinfeksi penyakit pada t waktu ($I_h(t)$)), dan *recovered* (individu yang sembuh dari penyakit pada t waktu ($R_h(t)$)), sedangkan untuk vektor (tikus) dikelompokkan menjadi dua kelompok, yaitu *susceptible* (vektor yang rentan terhadap penyakit pada t waktu ($S_v(t)$)) dan *infectious* (vektor yang terinfeksi penyakit pada t waktu ($I_v(t)$)).

5. Vektor yang sembuh langsung mati, sehingga tidak terjadi penularan.
6. Jumlah populasi individu dinyatakan sebagai $N_h(t)$ dengan $N_h(t) = S_h(t) + I_h(t) + R_h(t)$, sedangkan untuk jumlah populasi vektor dinyatakan sebagai $N_v(t)$ dengan $N_v(t) = S_v(t) + I_v(t)$.
7. Berikut merupakan definisi parameter-parameter yang terdapat dalam model dinamik, yaitu
 1. b_1 menyatakan angka penyebaran populasi individu.
 2. b_2 menyatakan angka penyebaran populasi vektor.
 3. β_1 menyatakan angka individu yang melakukan kontak langsung dengan individu yang sudah terinfeksi penyakit.
 4. β_2 menyatakan angka individu yang melakukan kontak langsung dengan vektor yang terinfeksi penyakit.
 5. β_3 menyatakan angka vektor yang terinfeksi pembawa penyakit per *host* per unit.
 6. μ_h menyatakan angka kematian natural individu.
 7. μ_v menyatakan angka kematian natural vektor.
 8. γ_h menyatakan jumlah individu yang sembuh dari penyakit.
 9. γ_v menyatakan angka kematian vektor.
 10. δ_h menyatakan angka kematian individu akibat terinfeksi penyakit.
 11. δ_v menyatakan angka kematian vektor akibat terinfeksi penyakit.
 12. λ_h menyatakan peluang individu untuk sembuh dari penyakit.

Dari asumsi di atas, dapat digambarkan diagram kompartemen dari model interaksi dinamis sebagai berikut:



Gambar 4.1 Diagram Kompartemen dari Model Interaksi Dinamis

Dari Gambar 4.1, diperoleh model interaksi dinamis sebagai berikut:

1. Besarnya laju populasi individu yang rentan terhadap penyakit (*susceptible*) dipengaruhi oleh jumlah

persebaran populasi individu, sedangkan populasi akan menurun dengan adanya beberapa kejadian, seperti kematian natural individu, individu yg terinfeksi penyakit karena melakukan kontak dengan vektor yang terinfeksi, dan individu yg terinfeksi penyakit karena melakukan kontak langsung dengan individu yang terinfeksi, kemudian populasi akan bertambah saat adanya individu yang telah sembuh dari penyakit.

$$\frac{dS_h}{dt} = b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h$$

2. Besarnya laju populasi individu yang terinfeksi penyakit (*infectious*) akan bertambah saat terdapat individu yang terinfeksi penyakit akibat kontak langsung dengan individu yang terinfeksi maupun dengan vektor yang terinfeksi dan populasi akan menurun dengan adanya kejadian kematian, baik secara natural maupun karena terinfeksi penyakit, serta individu yang terinfeksi namun telah sembuh.

$$\frac{dI_h}{dt} = \beta_2 S_h I_v + \beta_1 S_h I_h - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h$$

3. Besarnya laju populasi individu yang sembuh dari penyakit (*recovered*) bergantung pada jumlah individu yang terinfeksi namun sembuh dan populasi akan berkurang saat terdapat kejadian kematian individu yang sembuh dan peluang untuk kesembuhan kecil.

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h$$

4. Besarnya laju populasi vektor yang rentan terhadap penyakit (*susceptible*) bergantung pada jumlah persebaran populasi vektor dan populasi akan berkurang saat vektor yang mati dan total vektor pembawa infeksi yang berinteraksi dengan individu yang terinfeksi.

$$\frac{dS_v}{dt} = b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h$$

5. Besarnya laju populasi yang terinfeksi penyakit (*infectious*) bergantung pada total vektor pembawa infeksi yang berinteraksi dengan individu yang terinfeksi dan kematian alami vektor yang terinfeksi, sedangkan populasi akan berkurang akibat kematian vektor.

$$\frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v$$

Dari penjelasan diatas, maka sistem persamaan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\frac{dS_h}{dt} = b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h \quad (4.1)$$

$$\frac{dI_h}{dt} = \beta_2 S_h I_v + \beta_1 S_h I_h - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h \quad (4.2)$$

$$\frac{dR_h}{dt} = \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h \quad (4.3)$$

$$\frac{dS_v}{dt} = b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h \quad (4.4)$$

$$\frac{dI_v}{dt} = \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v \quad (4.5)$$

Dengan kondisi awal:

$$S_h(0) \geq 0, I_h(0) \geq 0, R_h(0) \geq 0, S_v(0) \geq 0, I_v(0) \geq 0 \quad (4.6)$$

4.2 Daerah Penyelesaian Model

Teorema 1 Misal $(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v)$ merupakan solusi dari model interaksi dinamis pada persamaan (4.1) – (4.5) dengan kondisi awal (4.6), maka

$$\Omega = ((S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \in R_+^5, (N_h \leq \frac{b_1}{\mu_h}, N_v \leq \frac{b_2}{\gamma_v}))$$

Ω merupakan invarian positif dan atraktif terhadap persamaan (4.1) - (4.5).

Bukti:

Misal diketahui fungsi

$$V(t) = (N_h(t), N_v(t)) \quad (4.7)$$

Karena diketahui bahwa $N_h = S_h + I_h + R_h$ dan $N_v = S_v + I_v$, sehingga persamaan (4.7) dapat ditulis sebagai berikut:

$$V(t) = (N_h(t), N_v(t)) = (S_h + I_h + R_h, S_v + I_v) \quad (4.8)$$

Kemudian turunan $V(t)$ terhadap waktu adalah

$$\frac{dV(t)}{dt} = \left(\frac{dN_h(t)}{dt}, \frac{dN_v(t)}{dt} \right) \quad (4.9)$$

Selanjutnya akan dicari nilai $\frac{dN_h(t)}{dt}$ dan $\frac{dN_v(t)}{dt}$.

$$N_h(t) = S_h(t) + I_h(t) + R_h(t) \quad (4.10)$$

Menurunkan persamaan (4.10) terhadap t adalah

$$\begin{aligned} \frac{dN_h(t)}{dt} &= \frac{dS_h(t)}{dt} + \frac{dI_h(t)}{dt} + \frac{dR_h(t)}{dt} \\ &= b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h + \beta_2 S_h I_v + \\ &\quad \beta_1 S_h I_h - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h + \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h \\ &= b_1 - \mu_h S_h - \mu_h I_h - \mu_h R_h - \delta_h I_h \\ &= b_1 - \mu_h (S_h + I_h + R_h) - \delta_h I_h \\ &= b_1 - \mu_h N_h - \delta_h I_h \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sedangkan

$$N_v(t) = S_v(t) + I_v(t) \quad (4.12)$$

Menurunkan persamaan (4.12) terhadap t adalah

$$\begin{aligned} \frac{dN_v(t)}{dt} &= \frac{dS_v(t)}{dt} + \frac{dI_v(t)}{dt} \\ &= b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h + \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v \\ &= b_2 - \gamma_v (S_v + I_v) - I_v (\delta_v - \mu_v) \\ &= b_2 - \gamma_v N_v - I_v (\delta_v - \mu_v) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Mensubstitusikan persamaan (4.11) dan (4.13) ke persamaan (4.9) diperoleh persamaan

$$\frac{dV(t)}{dt} = (b_1 - \mu_h N_h - \delta_h I_h, b_2 - \gamma_v N_h - I_v (\delta_v - \mu_v)) \quad (4.14)$$

Selanjutnya akan dicari nilai $N_h(t)$ dan $N_v(t)$ melalui persamaan (4.11) dan (4.13).

$$\begin{aligned} \frac{dN_h(t)}{dt} &= b_1 - \mu_h N_h - \delta_h I_h \\ &\leq b_1 - \mu_h N_h \end{aligned}$$

Persamaan (4.11) dapat dinyatakan

$$\frac{dN_h(t)}{dt} \leq b_1 - \mu_h N_h$$

Kemudian menambahkan $\mu_h N_h$ di kedua ruas, sehingga bentuk persamaannya seperti persamaan diferensial linier tingkat satu.

$$\frac{dN_h(t)}{dt} + \mu_h N_h = b_1$$

Maka penyelesaiannya dengan menggunakan persamaan diferensial terpisah.

$$\frac{dN_h(t)}{dt} = b_1 - \mu_h N_h$$

$$\frac{dN_h(t)}{b_1 - \mu_h N_h} = dt$$

Selanjutnya persamaan di atas akan diintegrasikan di kedua ruasnya

$$\int \frac{dN_h}{b_1 - \mu_h N_h} = \int dt$$

Misal: $u = b_1 - \mu_h N_h$, maka

$$dN_h = -\frac{du}{\mu_h}, \text{ sehingga}$$

$$\int -\frac{du}{u\mu_h} = \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu_h} \ln|u| = t - \ln|c|^{\frac{1}{\mu_h}}$$

$$\Leftrightarrow \ln|u| = -\mu_h t + \mu_h \ln|c|^{\frac{1}{\mu_h}}$$

$$\Leftrightarrow \ln|u| - \mu_h \ln|c|^{\frac{1}{\mu_h}} = -\mu_h t$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{|u|}{|c|^{\frac{1}{\mu_h}} \mu_h} = -\mu_h t$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{|u|}{|c|} = -\mu_h t$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{c} = e^{-\mu_h t}$$

$$\Leftrightarrow u = ce^{-\mu_h t}$$

Mensubstitusikan nilai u ke persamaan di atas

$$b_1 - \mu_h N_h = ce^{-\mu_h t}$$

$$\Leftrightarrow \mu_h N_h = b_1 + ce^{-\mu_h t}$$

$$\Leftrightarrow N_h(t) = \frac{b_1 + ce^{-\mu_h t}}{\mu_h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} N_h(t) = \frac{b_1}{\mu_h} \quad (4.15)$$

Sedangkan

$$\begin{aligned} \frac{dN_v(t)}{dt} &= b_2 - \gamma_v N_v - I_v(\delta_v - \mu_v) \text{ dengan } \delta_v > \mu_v > 0 \\ &\leq b_2 - \gamma_v N_v \end{aligned}$$

Maka, persamaan (4.13) dapat dinyatakan

$$\frac{dN_h(t)}{dt} \leq b_2 - \gamma_v N_v$$

Kemudian menambahkan $\gamma_v N_v$ di kedua ruas, sehingga bentuk persamaannya seperti persamaan diferensial linier tingkat satu.

$$\frac{dN_v(t)}{dt} + \gamma_v N_v = b_2$$

Maka penyelesaiannya dengan menggunakan persamaan diferensial terpisah.

$$\begin{aligned} \frac{dN_v(t)}{dt} &= b_2 - \gamma_v N_v \\ \frac{dN_v(t)}{b_2 - \gamma_v N_v} &= dt \end{aligned}$$

Selanjutnya persamaan di atas akan diintegrasikan di kedua ruasnya

$$\int \frac{dN_v}{b_2 - \gamma_v N_v} = \int dt$$

Misal: $u = b_2 - \gamma_v N_v$

Maka $dN_v = -\frac{du}{\gamma_v}$, sehingga

$$\int -\frac{du}{u\gamma_v} = \int dt$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\gamma_v} \ln|u| = t - \ln|c|^{\frac{1}{\gamma_v}}$$

$$\Leftrightarrow \ln|u| = -\gamma_v t + \gamma_v \ln|c|^{\frac{1}{\gamma_v}}$$

$$\Leftrightarrow \ln|u| - \gamma_v \ln|c|^{\frac{1}{\gamma_v}} = -\gamma_v t$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{|u|}{|c|^{\frac{1}{\gamma_v} \gamma_v}} = -\gamma_v t$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{|u|}{|c|} = -\gamma_v t$$

$$\Leftrightarrow \frac{u}{c} = e^{-\gamma_v t}$$

$$\Leftrightarrow u = ce^{-\gamma_v t}$$

Mensubstitusikan nilai u ke persamaan di atas

$$b_2 - \gamma_v N_v = ce^{-\gamma_v t}$$

$$\Leftrightarrow \gamma_v N_v = b_2 + ce^{-\gamma_v t}$$

$$\Leftrightarrow N_v = \frac{b_2 + ce^{-\gamma_v t}}{\gamma_v}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} N_v = \frac{b_2}{\gamma_v}$$

Karena kondisi awal pada persamaan (4.6) bernilai positif dan pada R_+^5 maka Ω merupakan invarian positif. Selain itu, $\frac{dV(t)}{dt} \leq 0$ memenuhi Ω yang merupakan invarian positif dan $t \rightarrow \infty$, sehingga dapat ditulis $0 \leq (N_h, N_v) \leq \left(\frac{b_1}{\mu_h}, \frac{b_2}{\gamma_v}\right)$ dan ini menunjukkan bahwa Ω merupakan himpunan dan penyelesaian yang terbatas dan atraktif terhadap persamaan (4.1) - (4.5).

4.3 Titik Keseimbangan Model Interaksi Dinamis

Titik keseimbangan dari sistem merupakan titik dimana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu.

Pandang persamaan diferensial

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = f_2(x, y)$$

Sebuah titik (x_0, y_0) merupakan titik keseimbangan dari persamaan di atas jika memenuhi $f_1(x_0, y_0) = 0$ dan $f_2(x_0, y_0) = 0$. Karena turunan suatu konstanta sama dengan nol, maka sepasang fungsi konstan $x(t) \equiv x_0$ dan $y(t) \equiv y_0$

merupakan penyelesaian kesetimbangan dari persamaan diferensial tersebut untuk semua $t \geq 0$. Selanjutnya akan dicari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik pada model interaksi dinamis.

4.3.1 Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Titik kesetimbang bebas penyakit adalah suatu keadaan tidak terjadi penyebaran penyakit menular dalam suatu populasi sehingga $I = 0$.

Untuk memperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dengan menyatakan ruas kiri pada persamaan (4.1-4.5) bernilai nol kemudian mensubstitusikannya untuk memperoleh titik $E_1 = (S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0)$.

Karena pada kondisi tidak ada penyebaran penyakit menular, otomatis $I_h^0 = I_v^0 = 0$. Selanjutnya akan dicari nilai S_h^0, R_h^0 , dan S_v^0 melalui persamaan (4.1), (4.3), dan (4.4) yang ruas kanannya bernilai nol kemudian mensubstitusikannya dengan $I_h^0 = I_v^0 = 0$.

Menentukan nilai R_h^0

$$\frac{dR_h}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 + R_h(-\mu_h - \lambda_h) = 0$$

$$\Leftrightarrow R_h(-\mu_h - \lambda_h) = 0$$

Karena $(-\mu_h - \lambda_h) \neq 0$, sehingga $R_h = 0$, maka

$$R_h^0 = 0 \quad (4.16)$$

Menentukan nilai S_h^0

$$\frac{dS_h}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1 - \mu_h S_h - 0 - 0 + \lambda_h R_h = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1 - \mu_h S_h + \lambda_h R_h = 0 \quad (4.17)$$

Mensubstitusikan persamaan (4.16) ke (4.17) sehingga

$$\Leftrightarrow b_1 - \mu_h S_h + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1 - \mu_h S_h = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \mu_h S_h = b_1 \\
&\Leftrightarrow S_h = \frac{b_1}{\mu_h}, \text{ maka} \\
&S_h^0 = \frac{b_1}{\mu_h}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Menentukan nilai S_v^0

$$\begin{aligned}
&\frac{dS_v}{dt} = 0 \\
&\Leftrightarrow b_2 - \gamma_v S_v = 0 \\
&\Leftrightarrow \gamma_v S_v = b_2 \\
&\Leftrightarrow S_v = \frac{b_2}{\gamma_v}, \text{ maka} \\
&S_h^0 = \frac{b_2}{\gamma_v}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Berdasarkan persamaan (4.16), (4.18), (4.19), dan diketahui bahwa $I_h^0 = I_v^0 = 0$, maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (S_h^0, 0, 0, S_v^0, 0) = \left(\frac{b_1}{\mu_h}, 0, 0, \frac{b_2}{\gamma_v}, 0\right)$.

4.3.2 Titik Kesetimbangan Endemik

Titik Kesetimbangan Endemik digunakan untuk menunjukkan adanya kemungkinan penyebaran penyakit pada suatu populasi sehingga $I_h^* \neq I_v^* \neq 0$.

Untuk memperoleh titik kesetimbangan endemik dengan menyatakan ruas kiri bernilai nol pada persamaan (4.1) - (4.5), sehingga $\frac{dS_h}{dt} = 0, \frac{dI_h}{dt} = 0, \frac{dR_h}{dt} = 0, \frac{dS_v}{dt} = 0$, dan $\frac{dI_v}{dt} = 0$, kemudian mensubstitusikannya untuk memperoleh titik $E_2 = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*)$.

Pertama-tama akan dicari nilai S_v^* sehingga

$$\begin{aligned}
&\frac{dS_v}{dt} = 0 \\
&\Leftrightarrow b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h = 0 \\
&\Leftrightarrow b_2 - S_v(\gamma_v + \beta_3 I_h) = 0 \\
&\Leftrightarrow S_v(\gamma_v + \beta_3 I_h) = b_2 \\
&S_v^* = \frac{b_2}{\gamma_v + \beta_3 I_h^*}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Selanjutnya akan dicari nilai R_h^* sehingga

$$\frac{dR_h}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_h I_h - R_h(\mu_h + \lambda_h) = 0 \quad (4.21)$$

Misal $Q_3 = \mu_h + \lambda_h$, sehingga persamaan (4.21) menjadi

$$\Leftrightarrow \gamma_h I_h - Q_3 R_h = 0$$

$$Q_3 R_h = \gamma_h I_h$$

$$R_h^* = \frac{\gamma_h}{Q_3} I_h^* \quad (4.22)$$

Kemudian akan dicari nilai I_v^* sehingga

$$\frac{dI_v}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_3 S_v I_h - I_v(-\mu_v + \gamma_v + \delta_v) = 0 \quad (4.23)$$

Misal $Q_1 = -\mu_v + \gamma_v + \delta_v$, sehingga persamaan (4.23) menjadi

$$\Leftrightarrow \beta_3 S_v I_h - Q_1 I_v = 0 \quad (4.24)$$

$$Q_1 I_v = \beta_3 S_v I_h$$

$$I_v^* = \frac{\beta_3 S_v^* I_h^*}{Q_1} \quad (4.25)$$

Mensubstitusikan persamaan (3.20) ke (4.25) sehingga

$$\begin{aligned} I_v^* &= \frac{\beta_3 \left(\frac{b_2}{\gamma_v + \beta_3 I_h^*} \right) I_h^*}{Q_1} \\ &= \frac{\beta_3 b_2 I_h^*}{\gamma_v + \beta_3 I_h^*} \\ &= \frac{Q_1}{\frac{\beta_3 b_2 I_h^*}{Q_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)}} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Selanjutnya akan dicari nilai S_h^* melalui eliminasi dan substitusi sebagai berikut

$$\frac{dI_h}{dt} = 0$$

$$\beta_2 S_h I_v + \beta_1 S_h I_h - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h = 0$$

$$\beta_2 S_h I_v + I_h(\beta_1 S_h - \mu_h - \delta_h - \gamma_h) = 0 \quad (4.27)$$

Misal $Q_2 = \mu_h + \delta_h + \gamma_h$, sehingga persamaan (4.27) menjadi

$$\beta_2 S_h I_v + I_h (\beta_1 S_h - Q_2) = 0 \quad (4.28)$$

Mengeliminasi I_v pada persamaan (4.24) dan (4.28) dengan mengalikan di kedua sisi $\beta_2 S_h$ pada persamaan (4.24) dan Q_1 pada persamaan (4.28) sehingga

$$\beta_2 \beta_3 S_h S_v I_h - \beta_2 S_h Q_1 I_v = 0 \quad (4.29)$$

$$Q_1 I_h (\beta_1 S_h - Q_2) + \beta_2 S_h Q_1 I_v = 0 \quad (4.30)$$

Selanjutnya akan dilakukan eliminasi pada persamaan (4.29) dan (4.30), sehingga

$$\beta_2 \beta_3 S_h S_v I_h + Q_1 I_h (\beta_1 S_h - Q_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow I_h [\beta_2 \beta_3 S_h S_v + Q_1 (\beta_1 S_h - Q_2)] = 0$$

Karena $I_h \neq 0$, maka $\beta_2 \beta_3 S_h S_v + Q_1 (\beta_1 S_h - Q_2) = 0$ sehingga

$$\beta_2 \beta_3 S_h S_v + Q_1 (\beta_1 S_h - Q_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta_2 \beta_3 S_h S_v + Q_1 \beta_1 S_h - Q_1 Q_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow S_h (\beta_2 \beta_3 S_v + Q_1 \beta_1) - Q_1 Q_2 = 0$$

$$S_h (\beta_2 \beta_3 S_v + Q_1 \beta_1) = Q_1 Q_2$$

$$S_h^* = \frac{Q_1 Q_2}{\beta_2 \beta_3 S_v^* + Q_1 \beta_1} \quad (4.31)$$

Mensubstitusikan persamaan (3.20) ke (4.31) sehingga

$$\begin{aligned} S_h^* &= \frac{Q_1 Q_2}{\beta_2 \beta_3 \left(\frac{b_2}{\gamma_v + \beta_3 I_h^*} \right) + Q_1 \beta_1} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{\frac{b_2 \beta_2 \beta_3}{\gamma_v + \beta_3 I_h^*} + Q_1 \beta_1} \\ &= \frac{Q_1 Q_2}{\frac{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)}{\gamma_v + \beta_3 I_h^*}} \\ &= \frac{Q_1 Q_2 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Sebelumnya telah dibahas bahwa $I_h \neq 0$, maka selanjutnya akan dicari nilai $f(I_h^*)$ dengan cara mensubstitusikan nilai S_h^* dan I_v^* pada persamaan (4.1) dan menseting sisi kiri pada persamaan (4.1) sama dengan nol, sehingga.

$$\begin{aligned}
\frac{dS_h}{dt} &= b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h \\
\Leftrightarrow 0 &= b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h \\
\Leftrightarrow 0 &= b_1 - \mu_h S_h^* - \beta_2 S_h^* I_v^* - \beta_1 S_h^* I_h^* + 0 \\
\Leftrightarrow 0 &= b_1 - \mu_h S_h^* - \beta_2 S_h^* I_v^* - \beta_1 S_h^* I_h^* \\
\Leftrightarrow 0 &= b_1 - \mu_h \left(\frac{Q_1 Q_2 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)} \right) - \\
&\quad \beta_2 \left(\frac{Q_1 Q_2 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)} \right) \left(\frac{\beta_3 b_2 I_h^*}{Q_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)} \right) - \\
&\quad \beta_1 \left(\frac{Q_1 Q_2 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)} \right) I_h^* \\
&= b_1 - \frac{Q_1 Q_2 \mu_h (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)} - \\
&\quad \frac{b_2 \beta_2 \beta_3 Q_2 I_h^*}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)} - \frac{\beta_1 Q_1 Q_2 I_h^* (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)} \\
&= b_1 [b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)] - Q_1 Q_2 \mu_h (\gamma_v + \beta_3 I_h^*) - \\
&\quad b_2 \beta_2 \beta_3 Q_2 I_h^* - \beta_1 Q_1 Q_2 I_h^* (\gamma_v + \beta_3 I_h^*) \\
&= b_1 b_2 \beta_2 \beta_3 + b_1 \beta_1 Q_1 \gamma_v + b_1 \beta_1 \beta_3 Q_1 I_h^* - Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v + \\
&\quad \beta_3 Q_1 Q_2 \mu_h I_h^* - b_2 \beta_2 \beta_3 Q_2 I_h^* - \beta_1 Q_1 Q_2 \gamma_v I_h^* - \\
&\quad \beta_1 \beta_3 Q_1 Q_2 I_h^{*2} \\
&\quad \beta_1 \beta_3 Q_1 Q_2 I_h^{*2} + (\beta_1 Q_1 Q_2 \gamma_v + b_2 \beta_2 \beta_3 Q_2 + \beta_3 Q_1 Q_2 \mu_h - \\
&\quad b_1 \beta_1 \beta_3 Q_1) I_h^* + Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v - b_1 \beta_1 Q_1 \gamma_v - b_1 b_2 \beta_2 \beta_3 = 0 \\
&\quad \beta_1 \beta_3 Q_1 Q_2 I_h^{*2} + (\beta_1 Q_1 Q_2 \gamma_v + b_2 \beta_2 \beta_3 Q_2 + \beta_3 Q_1 Q_2 \mu_h - \\
&\quad b_1 \beta_1 \beta_3 Q_1) I_h^* + Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v \left(1 - \frac{\beta_1 b_1}{Q_2 \mu_h} - \frac{b_1 b_2 \beta_2 \beta_3}{Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v} \right) = 0 \\
&\quad \beta_1 \beta_3 Q_1 Q_2 I_h^{*2} + (\beta_1 Q_1 Q_2 \gamma_v + b_2 \beta_2 \beta_3 Q_2 + \beta_3 Q_1 Q_2 \mu_h - \\
&\quad b_1 \beta_1 \beta_3 Q_1) I_h^* + Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v \left[1 - \frac{b_1}{\mu_h} \left(\frac{\beta_1}{Q_2} + \frac{b_2 \beta_2 \beta_3}{Q_1 Q_2 \gamma_v} \right) \right] = 0 \\
&\quad \beta_1 \beta_3 Q_1 Q_2 I_h^{*2} + (\beta_1 Q_1 Q_2 \gamma_v + b_2 \beta_2 \beta_3 Q_2 + \beta_3 Q_1 Q_2 \mu_h - \\
&\quad b_1 \beta_1 \beta_3 Q_1) I_h^* + Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v [1 - R_0] = 0
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Dengan $R_0 = \frac{b_1}{\mu_h} \left(\frac{\beta_1}{Q_2} + \frac{b_2 \beta_2 \beta_3}{Q_1 Q_2 \gamma_v} \right)$.

Untuk menyederhanakan persamaan (4.40), maka dimisalkan $a = \beta_1\beta_3Q_1Q_2$, $b = \beta_1Q_1Q_2\gamma_v + b_2\beta_2\beta_3Q_2 + \beta_3Q_1Q_2\mu_h - b_1\beta_1\beta_3Q_1$, $c = Q_1Q_2\mu_h\gamma_v[1 - R_0]$, sehingga diperoleh persamaan $f(I_h^*)$ sebagai berikut.

$$f(I_h^*) = aI_h^2 + bI_h + c = 0 \quad (4.34)$$

Sehingga dari persamaan (4.20), (4.22), (4.26), (4.32), dan (4.34) akan diperoleh titik kesetimbangan endemik

$$E^* = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*) = \left(\frac{Q_1Q_2(\gamma_v + \beta_3I_h^*)}{b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1(\gamma_v + \beta_3I_h^*)}, aI_h^2 + bI_h + c, \frac{\gamma_h I_h^*}{Q_3}, \frac{b_2}{\gamma_v + \beta_3I_h^*}, \frac{\beta_3 b_2 I_h^*}{Q_1(\gamma_v + \beta_3I_h^*)} \right).$$

4.4 Kestabilan Lokal Model Interaksi Dinamis

Setelah diperoleh titik kesetimbangan maka dilakukan analisis kestabilan. Analisis kestabilan dilakukan untuk mengetahui laju penyebaran suatu penyakit. Analisis ini dilakukan pada titik setimbang bebas penyakit (*Disease Free Equilibrium*) dan titik setimbang endemik (*Endemic Equilibrium*).

Model interaksi dinamis merupakan model persamaan yang tak linier, sehingga perlu dilakukan linierisasi terlebih dahulu sebelum melakukan analisis kestabilan. Untuk melakukan linierisasi digunakan ekspansi deret Taylor, pada persamaan (4.1) sampai (4.5) sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$(4.35) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_h}{dt} = A(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \\ \quad = b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h \\ \frac{dI_h}{dt} = B(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \\ \quad = \beta_2 S_h I_v + \beta_1 S_h I_h - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h \\ \frac{dR_h}{dt} = C(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \\ \quad = \gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h \\ \frac{dS_v}{dt} = D(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \\ \quad = b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h \\ \frac{dI_v}{dt} = E(S_h, I_h, R_h, S_v, I_v) \\ \quad = \beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v \end{array} \right.$$

Dengan titik tetap $(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0)$, maka

$$\begin{aligned} \frac{dS_h}{dt} &= A(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) = 0 \\ \frac{dI_h}{dt} &= B(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) = 0 \\ \frac{dR_h}{dt} &= C(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) = 0 \\ \frac{dS_v}{dt} &= D(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) = 0 \\ \frac{dI_v}{dt} &= E(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Misal:

$$\begin{aligned} S_h - S_h^0 &= u \Rightarrow \dot{S}_h = \dot{u} \\ I_h - I_h^0 &= v \Rightarrow \dot{I}_h = \dot{v} \\ R_h - R_h^0 &= x \Rightarrow \dot{S}_h = \dot{x} \\ S_v - S_v^0 &= y \Rightarrow \dot{S}_v = \dot{y} \\ I_v - I_v^0 &= z \Rightarrow \dot{I}_v = \dot{z} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Deret Taylor dari sitem (4.35) disekitar titik tetap $(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0)$ adalah

$$\frac{dS_h}{dt} = A(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) + (S_h - S_h^0) \frac{\partial A}{\partial S_h} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial A}{\partial I_h} +$$

$$(R_h - R_h^0) \frac{\partial A}{\partial R_h} + (S_v - S_v^0) \frac{\partial A}{\partial S_v} + (I_v - I_v^0) \frac{\partial A}{\partial I_v} + \dots$$

$$\frac{dI_h}{dt} = B(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) + (S_h - S_h^0) \frac{\partial B}{\partial S_h} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial B}{\partial I_h} +$$

$$(R_h - R_h^0) \frac{\partial B}{\partial R_h} + (S_v - S_v^0) \frac{\partial B}{\partial S_v} + (I_v - I_v^0) \frac{\partial B}{\partial I_v} + \dots$$

$$\frac{dR_h}{dt} = C(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) + (S_h - S_h^0) \frac{\partial C}{\partial S_h} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial C}{\partial I_h} +$$

$$(R_h - R_h^0) \frac{\partial C}{\partial R_h} + (S_v - S_v^0) \frac{\partial C}{\partial S_v} + (I_v - I_v^0) \frac{\partial C}{\partial I_v} + \dots$$

$$\frac{dS_v}{dt} = D(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) + (S_h - S_h^0) \frac{\partial D}{\partial S_h} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial D}{\partial I_h} +$$

$$(R_h - R_h^0) \frac{\partial D}{\partial R_h} + (S_v - S_v^0) \frac{\partial D}{\partial S_v} + (I_v - I_v^0) \frac{\partial D}{\partial I_v} + \dots$$

$$\frac{dI_v}{dt} = E(S_h^0, I_h^0, R_h^0, S_v^0, I_v^0) + (S_h - S_h^0) \frac{\partial E}{\partial S_h} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial E}{\partial I_h} +$$

$$(R_h - R_h^0) \frac{\partial E}{\partial R_h} + (S_v - S_v^0) \frac{\partial E}{\partial S_v} + (I_v - I_v^0) \frac{\partial E}{\partial I_v} + \dots$$

Berdasarkan persamaan (4.36), maka linearisasi dari sistem (4.35) adalah

$$\frac{dS_h}{dt} = (S_h - S_h^0) \frac{\partial A}{\partial S_h} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial A}{\partial I_h} + (R_h - R_h^0) \frac{\partial A}{\partial R_h} +$$

$$(S_v - S_v^0) \frac{\partial A}{\partial S_v} + (I_v - I_v^0) \frac{\partial A}{\partial I_v}$$

$$\frac{dI_h}{dt} = (S_h - S_h^0) \frac{\partial B}{\partial S_h} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial B}{\partial I_h} + (R_h - R_h^0) \frac{\partial B}{\partial R_h} +$$

$$(S_v - S_v^0) \frac{\partial B}{\partial S_v} + (I_v - I_v^0) \frac{\partial B}{\partial I_v}$$

$$\frac{dR_h}{dt} = (S_h - S_h^0) \frac{\partial C}{\partial S_h} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial C}{\partial I_h} + (R_h - R_h^0) \frac{\partial C}{\partial R_h} +$$

$$(S_v - S_v^0) \frac{\partial C}{\partial S_v} + (I_v - I_v^0) \frac{\partial C}{\partial I_v}$$

$$\frac{dS_v}{dt} = (S_h - S_h^0) \frac{\partial D}{\partial S_h} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial D}{\partial I_h} + (R_h - R_h^0) \frac{\partial D}{\partial R_h} +$$

$$(S_v - S_v^0) \frac{\partial D}{\partial S_v} + (I_v - I_v^0) \frac{\partial D}{\partial I_v}$$

$$\frac{dI_v}{dt} = (S_h - S_h^0) \frac{\partial E}{\partial S_h} + (I_h - I_h^0) \frac{\partial E}{\partial I_h} + (R_h - R_h^0) \frac{\partial E}{\partial R_h} +$$

$$(S_v - S_v^0) \frac{\partial E}{\partial S_v} + (I_v - I_v^0) \frac{\partial E}{\partial I_v}$$

Dengan menggunakan permisalan (4.37), maka hasil linearisasi dari sistem (4.35) seperti yang tertulis diatas menjadi:

$$\frac{dS_h}{dt} = u \frac{\partial A}{\partial S_h} + v \frac{\partial A}{\partial I_h} + x \frac{\partial A}{\partial R_h} + y \frac{\partial A}{\partial S_v} + z \frac{\partial A}{\partial I_v}$$

$$\frac{dI_h}{dt} = u \frac{\partial B}{\partial S_h} + v \frac{\partial B}{\partial I_h} + x \frac{\partial B}{\partial R_h} + y \frac{\partial B}{\partial S_v} + z \frac{\partial B}{\partial I_v}$$

$$\frac{dR_h}{dt} = u \frac{\partial C}{\partial S_h} + v \frac{\partial C}{\partial I_h} + x \frac{\partial C}{\partial R_h} + y \frac{\partial C}{\partial S_v} + z \frac{\partial C}{\partial I_v}$$

$$\frac{dS_v}{dt} = u \frac{\partial D}{\partial S_h} + v \frac{\partial D}{\partial I_h} + x \frac{\partial D}{\partial R_h} + y \frac{\partial D}{\partial S_v} + z \frac{\partial D}{\partial I_v}$$

$$\frac{dI_v}{dt} = u \frac{\partial E}{\partial S_h} + v \frac{\partial E}{\partial I_h} + x \frac{\partial E}{\partial R_h} + y \frac{\partial E}{\partial S_v} + z \frac{\partial E}{\partial I_v}$$

Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{dS_h}{dt} \\ \frac{dI_h}{dt} \\ \frac{dR_h}{dt} \\ \frac{dS_v}{dt} \\ \frac{dI_v}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial S_h} & \frac{\partial A}{\partial I_h} & \frac{\partial A}{\partial R_h} & \frac{\partial A}{\partial S_v} & \frac{\partial A}{\partial I_v} \\ \frac{\partial B}{\partial S_h} & \frac{\partial B}{\partial I_h} & \frac{\partial B}{\partial R_h} & \frac{\partial B}{\partial S_v} & \frac{\partial B}{\partial I_v} \\ \frac{\partial C}{\partial S_h} & \frac{\partial C}{\partial I_h} & \frac{\partial C}{\partial R_h} & \frac{\partial C}{\partial S_v} & \frac{\partial C}{\partial I_v} \\ \frac{\partial D}{\partial S_h} & \frac{\partial D}{\partial I_h} & \frac{\partial D}{\partial R_h} & \frac{\partial D}{\partial S_v} & \frac{\partial D}{\partial I_v} \\ \frac{\partial E}{\partial S_h} & \frac{\partial E}{\partial I_h} & \frac{\partial E}{\partial R_h} & \frac{\partial E}{\partial S_v} & \frac{\partial E}{\partial I_v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Matriks Jacobian dari matriks diatas adalah

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial S_h} & \frac{\partial A}{\partial I_h} & \frac{\partial A}{\partial R_h} & \frac{\partial A}{\partial S_v} & \frac{\partial A}{\partial I_v} \\ \frac{\partial B}{\partial S_h} & \frac{\partial B}{\partial I_h} & \frac{\partial B}{\partial R_h} & \frac{\partial B}{\partial S_v} & \frac{\partial B}{\partial I_v} \\ \frac{\partial C}{\partial S_h} & \frac{\partial C}{\partial I_h} & \frac{\partial C}{\partial R_h} & \frac{\partial C}{\partial S_v} & \frac{\partial C}{\partial I_v} \\ \frac{\partial D}{\partial S_h} & \frac{\partial D}{\partial I_h} & \frac{\partial D}{\partial R_h} & \frac{\partial D}{\partial S_v} & \frac{\partial D}{\partial I_v} \\ \frac{\partial E}{\partial S_h} & \frac{\partial E}{\partial I_h} & \frac{\partial E}{\partial R_h} & \frac{\partial E}{\partial S_v} & \frac{\partial E}{\partial I_v} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari matriks Jacobian dari sistem (4.35) dengan mendiferensialkannya sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial S_h} &= \frac{\partial(b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h)}{\partial S_h} \\ &= -\mu_h - \beta_2 I_v - \beta_1 I_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial I_h} &= \frac{\partial(b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h)}{\partial I_h} \\ &= -\beta_1 S_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial R_h} &= \frac{\partial(b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h)}{\partial R_h} \\ &= \lambda_h \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A}{\partial S_v} = \frac{\partial(b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h)}{\partial S_v}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial I_v} = \frac{\partial(b_1 - \mu_h S_h - \beta_2 S_h I_v - \beta_1 S_h I_h + \lambda_h R_h)}{\partial I_v}$$

$$= -\beta_2 S_h$$

$$\frac{\partial B}{\partial S_h} = \frac{\partial(\beta_2 S_h I_v + \beta_1 S_h I_h - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h)}{\partial S_h}$$

$$= \beta_2 I_v + \beta_1 I_h$$

$$\frac{\partial B}{\partial I_h} = \frac{\partial(\beta_2 S_h I_v + \beta_1 S_h I_h - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h)}{\partial I_h}$$

$$= \beta_1 S_h - \mu_h - \delta_h - \gamma_h$$

$$\frac{\partial B}{\partial R_h} = \frac{\partial(\beta_2 S_h I_v + \beta_1 S_h I_h - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h)}{\partial R_h}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial S_v} = \frac{\partial(\beta_2 S_h I_v + \beta_1 S_h I_h - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h)}{\partial S_v}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial B}{\partial I_v} = \frac{\partial(\beta_2 S_h I_v + \beta_1 S_h I_h - \mu_h I_h - \delta_h I_h - \gamma_h I_h)}{\partial I_v}$$

$$= \beta_2 S_h$$

$$\frac{\partial C}{\partial S_h} = \frac{\partial(\gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h)}{\partial S_h}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial I_h} = \frac{\partial(\gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h)}{\partial I_h}$$

$$= \gamma_h$$

$$\frac{\partial C}{\partial R_h} = \frac{\partial(\gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h)}{\partial R_h}$$

$$= -\mu_h - \lambda_h$$

$$\frac{\partial C}{\partial S_v} = \frac{\partial(\gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h)}{\partial S_v}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial C}{\partial I_v} = \frac{\partial(\gamma_h I_h - \mu_h R_h - \lambda_h R_h)}{\partial I_v}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial S_h} = \frac{\partial(b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h)}{\partial S_h}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial I_h} = \frac{\partial(b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h)}{\partial I_h}$$

$$= -\beta_3 S_v$$

$$\frac{\partial D}{\partial R_h} = \frac{\partial(b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h)}{\partial R_h}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial S_v} = \frac{\partial(b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h)}{\partial S_v}$$

$$= -\gamma_v - \beta_3 I_h$$

$$\frac{\partial D}{\partial I_v} = \frac{\partial(b_2 - \gamma_v S_v - \beta_3 S_v I_h)}{\partial I_v}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial S_h} = \frac{\partial(\beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v)}{\partial S_h}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial I_h} = \frac{\partial(\beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v)}{\partial I_h}$$

$$= \beta_3 S_v$$

$$\frac{\partial E}{\partial R_h} = \frac{\partial(\beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v)}{\partial R_h}$$

$$= 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial S_v} = \frac{\partial(\beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v)}{\partial S_v}$$

$$= \beta_3 I_h$$

$$\frac{\partial E}{\partial I_v} = \frac{\partial(\beta_3 S_v I_h + \mu_v I_v - \gamma_v I_v - \delta_v I_v)}{\partial I_v}$$

$$= \mu_v - \gamma_v - \delta_v$$

Dari hasil turunan di atas, dapat ditulis dalam bentuk matriks Jacobian sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} -\mu_h - \beta_2 I_v - \beta_1 I_h & -\beta_1 S_h & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h \\ \beta_2 I_v + \beta_1 I_h & \beta_1 S_h - \mu_h - \delta_h - \gamma_h & 0 & 0 & \beta_2 S_h \\ 0 & \gamma_h & -\mu_h - \lambda_h & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 S_v & 0 & -\gamma_v - \beta_3 I_h & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v & 0 & \beta_3 I_h & \mu_v - \gamma_v - \delta_v \end{bmatrix}$$

Karena diketahui $Q_1 = \gamma_v + \delta_v - \mu_v$, $Q_2 = \mu_h + \delta_h + \gamma_h$, dan $Q_3 = \mu_h + \lambda_h$, maka matriks Jacobian di atas dapat ditulis ulang menjadi

$$J = \begin{bmatrix} -\mu_h - \beta_2 I_v - \beta_1 I_h & -\beta_1 S_h & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h \\ \beta_2 I_v + \beta_1 I_h & \beta_1 S_h - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 S_h \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 S_v & 0 & -\gamma_v - \beta_3 I_h & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v & 0 & \beta_3 I_h & -Q_1 \end{bmatrix}$$

4.4.1 Kestabilan Lokal Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Teorema 2. Jika $R_0 \geq 1$ dan $Q_2 > \frac{\beta_1 b_1}{\mu_h}$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit (E_1) dari sistem (4.35) stabil asimtot lokal, dan jika $R_0 \leq 1$ dan $Q_2 < \frac{\beta_1 b_1}{\mu_h}$, maka tidak stabil.

Bukti

Matriks Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} -\mu_h - \beta_2 I_v - \beta_1 I_h & -\beta_1 S_h & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h \\ \beta_2 I_v + \beta_1 I_h & \beta_1 S_h - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 S_h \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 S_v & 0 & -\gamma_v - \beta_3 I_h & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v & 0 & \beta_3 I_h & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Dengan $Q_1 = \gamma_v + \delta_v - \mu_v$, $Q_2 = \mu_h + \delta_h + \gamma_h$, dan $Q_3 = \mu_h + \lambda_h$

Untuk titik setimbang bebas penyakit $E_1 = (S_h^0, 0, 0, S_v^0, 0)$, maka

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 S_h^0 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^0 \\ 0 & \beta_1 S_h^0 - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 S_h^0 \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 S_v^0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v^0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Karena diketahui $M_1 = \beta_1 S_h^0 - Q_2$, maka

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 S_h^0 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & \beta_2 S_h^0 \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 S_v^0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v^0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah mencari persamaan karakteristiknya, maka pada $J(E_1)$ akan diubah ke dalam bentuk matriks segitiga atas dengan cara OBE sebagai berikut.

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 S_h^0 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & \beta_2 S_h^0 \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 S_v^0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v^0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix} \sim B_3 - \frac{\gamma_h}{M_1} B_2$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 S_h^0 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & \beta_2 S_h^0 \\ 0 & 0 & -Q_3 & 0 & M_2 \\ 0 & -\beta_3 S_v^0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v^0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix} \sim B_4 + \frac{\beta_3 S_v^0}{M_1} B_2$$

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 S_h^0 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & \beta_2 S_h^0 \\ 0 & 0 & -Q_3 & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & M_3 \\ 0 & \beta_3 S_v^0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix} \sim B_5 - \frac{\beta_3 S_v^0}{M_1} B_2$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 S_h^0 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & \beta_2 S_h^0 \\ 0 & 0 & -Q_3 & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & M_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_4 \end{bmatrix} \sim M_1 B_5$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 S_h^0 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & \beta_2 S_h^0 \\ 0 & 0 & -Q_3 & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & M_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_5 \end{bmatrix}$$

Dengan $M_2 = \frac{-\gamma_h \beta_2 S_h^0}{M_1}$, $M_3 = \frac{\beta_2 \beta_3 S_h^0 S_v^0}{M_1}$, $M_4 = -Q_1 - \frac{\beta_2 \beta_3 S_h^0 S_v^0}{M_1}$,

dan $M_5 = -M_1 Q_1 - \beta_2 \beta_3 S_h^0 S_v^0$.

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|J(E_1) - \lambda I| = 0$$

Sehingga

$$\begin{vmatrix} -\mu_h & -\beta_1 S_h^0 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & \beta_2 S_h^0 \\ 0 & 0 & -Q_3 & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & M_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_5 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\mu_h - \lambda & -\beta_1 S_h^0 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^0 \\ 0 & M_1 - \lambda & 0 & 0 & \beta_2 S_h^0 \\ 0 & 0 & -Q_3 - \lambda & 0 & M_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v - \lambda & M_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dari matriks Jacobian di atas akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$(-\mu_h - \lambda)(M_1 - \lambda)(-Q_3 - \lambda)(-\gamma_v - \lambda)(M_5 - \lambda) = 0$$

Sehingga akan diperoleh nilai eigen dari akar karakteristiknya sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -\mu_h < 0$$

$$\lambda_2 = M_1$$

Karena $M_1 = \beta_1 S_h^0 - Q_2$, maka

$$\lambda_2 = \beta_1 S_h^0 - Q_2$$

Karena $\lambda_2 < 0$, maka

$$\lambda_2 = \beta_1 S_h^0 - Q_2 < 0$$

$$\beta_1 S_h^0 - Q_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow Q_2 - \beta_1 S_h^0 > 0$$

$$\Leftrightarrow Q_2 > \beta_1 S_h^0$$

Karena $S_h^0 = \frac{b_1}{\mu_h}$, maka

$$Q_2 > \frac{b_1 \beta_1}{\mu_h}$$

$$\lambda_3 = -Q_3 < 0$$

$$\lambda_4 = -\gamma_v < 0$$

$$\lambda_5 = M_5$$

Karena $M_5 = -M_1 Q_1 - \beta_2 \beta_3 S_h^0 S_v^0$, maka

$$\lambda_5 = -M_1 Q_1 - \beta_2 \beta_3 S_h^0 S_v^0$$

Karena $\lambda_5 < 0$, maka

$$\lambda_5 = -M_1 Q_1 - \beta_2 \beta_3 S_h^0 S_v^0 < 0$$

$$-M_1Q_1 - \beta_2\beta_3S_h^0S_v^0 < 0$$

Dengan menggunakan nilai M_1 , S_h^0 , dan S_v^0 , maka

$$-M_1Q_1 - \beta_2\beta_3S_h^0S_v^0 < 0$$

$$\Leftrightarrow -Q_1(-Q_2 + \beta_1S_h^0) - \beta_2\beta_3S_h^0S_v^0 < 0$$

$$\Leftrightarrow Q_1Q_2 - Q_1\beta_1S_h^0 - \beta_2\beta_3S_h^0S_v^0 < 0$$

$$\Leftrightarrow Q_1Q_2 - Q_1\beta_1\left(\frac{b_1}{\mu_h}\right) - \beta_2\beta_3\left(\frac{b_1}{\mu_h}\right)\left(\frac{b_2}{\gamma_h}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow Q_1Q_2 - Q_1\beta_1\left(\frac{b_1}{\mu_h}\right) - \beta_2\beta_3\left(\frac{b_1}{\mu_h}\right)\left(\frac{b_2}{\gamma_v}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow Q_1Q_2 - \frac{Q_1\beta_1b_1}{\mu_h} - \frac{b_1b_2\beta_2\beta_3}{\mu_h\gamma_v} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_1Q_2\mu_h\gamma_h - Q_1\beta_1b_1\gamma_v - b_1b_2\beta_2\beta_3}{\mu_h\gamma_v} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q_1\beta_1b_1\gamma_v + b_1b_2\beta_2\beta_3 - Q_1Q_2\mu_h\gamma_v}{-\mu_h\gamma_v} < 0$$

$$\Leftrightarrow Q_1\beta_1b_1\gamma_v + b_1b_2\beta_2\beta_3 - Q_1Q_2\mu_h\gamma_v > 0$$

$$\Leftrightarrow Q_1Q_2\mu_h\gamma_v\left(\frac{\beta_1b_1}{Q_2\mu_h} + \frac{b_1b_2\beta_2\beta_3}{Q_1Q_2\mu_h\gamma_v} - 1\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow Q_1Q_2\mu_h\gamma_v\left[\frac{b_1}{\mu_h}\left(\frac{\beta_1}{Q_2} + \frac{b_2\beta_2\beta_3}{Q_1Q_2\gamma_v}\right) - 1\right] > 0$$

$$\Leftrightarrow Q_1Q_2\mu_h\gamma_v(R_0 - 1) > 0$$

$$R_0 - 1 > 0$$

$$R_0 \geq 1$$

$$\text{Dengan } R_0 = \frac{b_1}{\mu_h} \left(\frac{\beta_1}{Q_2} + \frac{b_2 \beta_2 \beta_3}{Q_1 Q_2 \gamma_v} \right)$$

Semua nilai eigen bernilai real negatif jika $Q_2 > \frac{b_1 \beta_1}{\mu_h}$. Hal ini menunjukkan bahwa titik setimbang bebas penyakit (E_1) stabil lokal asimtotis.

Kasus 1. *Matriks Jacobian di sekitar kesetimbangan trivial*
 $E_0 = (0,0,0,0,0)$

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & \lambda_h & 0 & 0 \\ 0 & -Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah mencari persamaan karakteristiknya, maka pada $J(E_0)$ akan diubah ke dalam bentuk matriks segitiga atas dengan cara OBE sebagai berikut.

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & \lambda_h & 0 & 0 \\ 0 & -Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix} \sim B_3 + \frac{\gamma_h}{Q_2} B_2$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & \lambda_h & 0 & 0 \\ 0 & -Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix} \sim Q_2 B_3$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & \lambda_h & 0 & 0 \\ 0 & -Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_2 Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|J(E_0) - \lambda I| = 0$$

Sehingga

$$\left| \begin{bmatrix} -\mu_h & 0 & \lambda_h & 0 & 0 \\ 0 & -Q_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_2 Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\mu_h - \lambda & 0 & \lambda_h & 0 & 0 \\ 0 & -Q_2 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_2 Q_3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dari matriks Jacobian di atas akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$(-\mu_h - \lambda)(-Q_2 - \lambda)(-Q_2 Q_3 - \lambda)(-\gamma_v - \lambda)(-Q_1 - \lambda) = 0$$

Sehingga akan diperoleh nilai eigen dari akar karakteristiknya sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -\mu_h < 0$$

$$\lambda_2 = -Q_2 < 0$$

$$\lambda_3 = -Q_2 Q_3 < 0$$

$$\lambda_4 = -\gamma_v < 0$$

$$\lambda_5 = -Q_1 < 0$$

Semua nilai eigen bernilai real negatif, hal ini menunjukkan bahwa kesetimbangan trivialnya stabil lokal.

Teorema 3. *Jika $Q_2 > \beta_1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit $E_{1.1} = (1,0,0,0,0)$ stabil asimtot lokal.*

Bukti

Matriks Jacobian untuk $E_{1.1} = (1,0,0,0,0)$

$$J(E_{1.1}) = \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 \\ 0 & \beta_1 - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah mencari persamaan karakteristiknya, maka pada $J(E_{1.1})$ akan diubah ke dalam bentuk matriks segitiga atas dengan cara OBE sebagai berikut.

$$J(E_{1.1}) = \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 \\ 0 & \beta_1 - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix} \sim B_3 - \frac{\gamma_h}{\beta_1 - Q_2} B_2$$

$$J(E_{1.1}) = \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 \\ 0 & \beta_1 - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix} \sim (\beta_1 - Q_2) B_3$$

$$= \begin{bmatrix} -\mu_h & -\beta_1 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 \\ 0 & \beta_1 - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & M_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Dengan $M_6 = Q_2 Q_3 - \beta_1 Q_3$.

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|J(E_{1.1}) - \lambda I| = 0$$

Sehingga

$$\begin{vmatrix} -\mu_h & -\beta_1 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 \\ 0 & \beta_1 - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & M_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\mu_h - \lambda & -\beta_1 & \lambda_h & 0 & -\beta_2 \\ 0 & \beta_1 - Q_2 - \lambda & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & M_6 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_v - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -Q_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dari matriks Jacobian di atas akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$(-\mu_h - \lambda)(\beta_1 - Q_2 - \lambda)(M_6 - \lambda)(-\gamma_v - \lambda)(-Q_1 - \lambda) = 0$$

Sehingga akan diperoleh nilai eigen dari akar karakteristiknya sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -\mu_h < 0$$

$$\lambda_2 = \beta_1 - Q_2$$

Karena $\lambda_2 < 0$, maka

$$\beta_1 - Q_2 < 0$$

$$Q_2 - \beta_1 > 0$$

$$Q_2 > \beta_1$$

$$\lambda_3 = M_6$$

Karena $M_6 = Q_2 Q_3 - \beta_1 Q_3$ dan $\lambda_3 < 0$, maka

$$\lambda_3 = Q_2 Q_3 - \beta_1 Q_3 < 0$$

$$\lambda_4 = -\gamma_v < 0$$

$$-Q_1 - \lambda_5 = 0$$

$$\lambda_5 = -Q_1 < 0$$

Semua nilai eigen dari akar persamaan karakteristik bernilai real negatif jika dan hanya jika $Q_2 > \beta_1$. Hal ini menunjukkan bahwa titik kesetimbangan $E_{1,1}$ stabil asimtotis lokal.

4.4.2 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Endemik

Teorema 4. *Jika $R_0 > 1$ dan $Q_1 > 1$, maka titik kesetimbangan endemik dari sistem (4.35) stabil lokal asimtotis.*

Bukti

Matriks Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} -\mu_h - \beta_2 I_v - \beta_1 I_h & -\beta_1 S_h & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h \\ \beta_2 I_v + \beta_1 I_h & \beta_1 S_h - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 S_h \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 S_v & 0 & -\gamma_v - \beta_3 I_h & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v & 0 & \beta_3 I_h & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Dengan $Q_1 = \gamma_v + \delta_v - \mu_v$, $Q_2 = \mu_h + \delta_h + \gamma_h$, dan $Q_3 = \mu_h + \lambda_h$

Untuk titik kesetimbangan endemik $E^* = (S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_v^*, I_v^*)$, diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut.

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -\mu_h - \beta_2 I_v^* - \beta_1 I_h^* & -\beta_1 S_h^* & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ \beta_2 I_v^* + \beta_1 I_h^* & \beta_1 S_h^* - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 S_h^* \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 S_v^* & 0 & -\gamma_v - \beta_3 I_h^* & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v^* & 0 & \beta_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Anggap $M_1 = \mu_h + \beta_2 I_v^* + \beta_1 I_h^*$ dan $M_2 = \beta_2 I_v^* + \beta_1 I_h^*$, sehingga.

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -M_1 & -\beta_1 S_h^* & \lambda_h & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ M_2 & \beta_1 S_h^* - Q_2 & 0 & 0 & \beta_2 S_h^* \\ 0 & \gamma_h & -Q_3 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 S_v^* & 0 & -\gamma_v - \beta_3 I_h^* & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v^* & 0 & \beta_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Agar memudahkan dalam menghitung, maka matriks $J(E^*)$ dapat direduksi menjadi

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -M_1 & -\beta_1 S_h^* & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ M_2 & \beta_1 S_h^* - Q_2 & 0 & \beta_2 S_h^* \\ 0 & -\beta_3 S_v^* & -\gamma_v - \beta_3 I_h^* & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v^* & \beta_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah mencari persamaan karakteristiknya, maka pada $J(E^*)$ akan diubah ke dalam bentuk matriks segitiga atas dengan cara OBE sebagai berikut.

$$\begin{aligned} J(E^*) &= \begin{bmatrix} -M_1 & -\beta_1 S_h^* & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ M_2 & \beta_1 S_h^* - Q_2 & 0 & \beta_2 S_h^* \\ 0 & -\beta_3 S_v^* & -\gamma_v - \beta_3 I_h^* & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v^* & \beta_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix} \sim B_2 + \frac{M_2}{M_1} B_1 \\ &= \begin{bmatrix} -M_1 & -\beta_1 S_h^* & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ 0 & M_3 & 0 & M_4 \\ 0 & -\beta_3 S_v^* & -\gamma_v - \beta_3 I_h^* & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v^* & \beta_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix} \sim \frac{\mu_h}{M_1 Q_1} B_2 \end{aligned}$$

Dengan $M_3 = \beta_1 S_h^* - Q_2 - \frac{M_2 \beta_1 S_h^*}{M_1}$, $M_4 = \beta_2 S_h^* - \frac{M_2 \beta_2 S_h^*}{M_1}$.

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -M_1 & -\beta_1 S_h^* & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ 0 & M_5 & 0 & M_6 \\ 0 & -\beta_3 S_v^* & -\gamma_v - \beta_3 I_h^* & 0 \\ 0 & \beta_3 S_v^* & \beta_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix} \sim B_3 + \frac{\beta_3 S_v^*}{M_5} B_2$$

Dengan $M_5 = \frac{\mu_h \beta_1 S_h^*}{M_1 Q_1} - \frac{\mu_h Q_2}{M_1 Q_1} - \frac{\mu_h M_2 \beta_1 S_h^*}{M_1^2 Q_1}$ dan $M_6 = \frac{\mu_h \beta_1 S_h^*}{M_1 Q_1} - \frac{\mu_h M_2 \beta_2 S_h^*}{M_1^2 Q_1}$.

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -M_1 & -\beta_1 S_h^* & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ 0 & M_5 & 0 & M_6 \\ 0 & 0 & -\gamma_v & -Q_1 \\ 0 & \beta_3 S_v^* & \beta_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix} \sim B_3 + B_4$$

$$= \begin{bmatrix} -M_1 & -\beta_1 S_h^* & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ 0 & M_5 & 0 & M_6 \\ 0 & 0 & -\gamma_v & -Q_1 \\ 0 & \beta_3 S_v^* & \beta_3 I_h^* & -Q_1 \end{bmatrix} \sim B_4 - \frac{\beta_3 S_v^*}{M_5} B_2$$

$$= \begin{bmatrix} -M_1 & -\beta_1 S_h^* & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ 0 & M_5 & 0 & M_6 \\ 0 & 0 & -\gamma_v & -Q_1 \\ 0 & 0 & \beta_3 I_h^* & M_7 \end{bmatrix} \sim B_4 + \frac{\beta_3 I_h^*}{\gamma_v} B_3$$

Dengan $M_7 = -Q_1 - \frac{M_6 \beta_3 I_h^*}{M_5}$.

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} -M_1 & -\beta_1 S_h^* & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ 0 & M_5 & 0 & M_6 \\ 0 & 0 & -\gamma_v & -Q_1 \\ 0 & 0 & 0 & -M_8 \end{bmatrix}$$

Dengan $M_8 = Q_1 + \frac{M_6 \beta_3 I_h^*}{M_5} + \frac{Q_1 \beta_3 I_h^*}{\gamma_v}$.

Selanjutnya dicari persamaan karakteristik dari matriks Jacobian tersebut dengan menggunakan

$$|J(E^*) - \lambda I| = 0$$

Sehingga

$$\left| \begin{bmatrix} -M_1 & -\beta_1 S_h^* & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ 0 & M_5 & 0 & M_6 \\ 0 & 0 & -\gamma_v & -Q_1 \\ 0 & 0 & 0 & -M_8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} -M_1 - \lambda & -\beta_1 S_h^* & 0 & -\beta_2 S_h^* \\ 0 & M_5 - \lambda & 0 & M_6 \\ 0 & 0 & -\gamma_v - \lambda & -Q_1 \\ 0 & 0 & 0 & -M_8 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Dari matriks Jacobian di atas akan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$(-M_1 - \lambda)(M_5 - \lambda)(-\gamma_v - \lambda)(-M_8 - \lambda) = 0$$

Dari persamaan karakteristik di atas akan diperoleh lima nilai eigen sebagai berikut.

$$\lambda_1 = -M_1$$

Karena $M_1 = \mu_h + \beta_2 I_v^* + \beta_1 I_h^*$, maka

$$\lambda_1 = -\mu_h - \beta_2 I_v^* - \beta_1 I_h^* < 0$$

$$\lambda_2 = M_5$$

Karena $M_5 = \frac{\mu_h \beta_1 S_h^*}{M_1 Q_1} - \frac{\mu_h Q_2}{M_1 Q_1} - \frac{\mu_h M_2 \beta_1 S_h^*}{M_1^2 Q_1}$, maka

$$\lambda_2 = \frac{\mu_h \beta_1 S_h^*}{M_1 Q_1} - \frac{\mu_h Q_2}{M_1 Q_1} - \frac{\mu_h M_2 \beta_1 S_h^*}{M_1^2 Q_1} < 0$$

$$\frac{\mu_h \beta_1 S_h^*}{M_1 Q_1} - \frac{\mu_h Q_2}{M_1 Q_1} - \frac{\mu_h M_2 \beta_1 S_h^*}{M_1^2 Q_1} < 0$$

$$\frac{M_1 \mu_h \beta_1 S_h^* - M_1 \mu_h Q_2 - \mu_h M_2 \beta_1 S_h^*}{M_1^2 Q_1} < 0$$

$$M_1 \mu_h \beta_1 S_h^* - M_1 \mu_h Q_2 - \mu_h M_2 \beta_1 S_h^* < 0$$

$$M_1 \mu_h Q_2 + \mu_h M_2 \beta_1 S_h^* - M_1 \mu_h \beta_1 S_h^* > 0 \quad (4.38)$$

Mensubstitusikan nilai M_1 dan M_2 ke persamaan (4.38)

$$(\mu_h + \beta_2 I_v^* + \beta_1 I_h^*) \mu_h Q_2 + (\beta_2 I_v^* + \beta_1 I_h^*) \mu_h \beta_1 S_h^* -$$

$$(\mu_h + \beta_2 I_v^* + \beta_1 I_h^*) \mu_h \beta_1 S_h^* > 0$$

$$Q_2 \mu_h^2 + \beta_2 Q_2 \mu_h I_v^* + \beta_1 Q_2 \mu_h I_h^* + \beta_1 \beta_2 \mu_h S_h^* I_v^* + \beta_1^2 \mu_h S_h^* I_h^* -$$

$$\beta_1 \mu_h^2 S_h^* - \beta_1 \beta_2 \mu_h S_h^* I_v^* - \beta_1^2 \mu_h S_h^* I_h^* > 0$$

$$Q_2 \mu_h^2 + \beta_2 Q_2 \mu_h I_v^* + \beta_1 Q_2 \mu_h I_h^* - \beta_1 \mu_h^2 S_h^* > 0$$

Mensubstitusikan nilai S_h^* ke persamaan di atas

$$Q_2 \mu_h^2 + \beta_2 Q_2 \mu_h I_v^* + \beta_1 Q_2 \mu_h I_h^* -$$

$$\beta_1 \mu_h^2 \left(\frac{Q_1 Q_2 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)} \right) > 0$$

$$Q_2\mu_h^2 + \beta_2 Q_2\mu_h I_v^* + \beta_1 Q_2\mu_h I_h^* - \beta_1\mu_h^2 \left(\frac{Q_1 Q_2 \gamma_v + Q_1 Q_2 \beta_3 I_h^*}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 \gamma_v + Q_1 \beta_1 \beta_3 I_h^*} \right) > 0$$

$$Q_2\mu_h^2 + \beta_2 Q_2\mu_h I_v^* + \beta_1 Q_2\mu_h I_h^* - \frac{\beta_1 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h^2}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 \gamma_v + Q_1 \beta_1 \beta_3 I_h^*} - \frac{\beta_1 \beta_3 Q_1 Q_2 \mu_h^2 I_h^*}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 \gamma_v + Q_1 \beta_1 \beta_3 I_h^*} > 0$$

Mensubstitusikan nilai I_v^* ke persamaan di atas

$$Q_2\mu_h^2 + \beta_2 Q_2\mu_h \left(\frac{\beta_3 b_2 I_h^*}{Q_1 (\gamma_v + \beta_3 I_h^*)} \right) + \beta_1 Q_2\mu_h I_h^* - \frac{\beta_1 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h^2}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 \gamma_v + Q_1 \beta_1 \beta_3 I_h^*} - \frac{\beta_1 \beta_3 Q_1 Q_2 \mu_h^2 I_h^*}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 \gamma_v + Q_1 \beta_1 \beta_3 I_h^*} > 0$$

$$Q_2\mu_h^2 + \frac{b_2 \beta_2 \beta_3 Q_2 \mu_h I_h^*}{Q_1 \gamma_v + \beta_3 Q_1 I_h^*} + \beta_1 Q_2\mu_h I_h^* - \frac{\beta_1 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h^2}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 \gamma_v + Q_1 \beta_1 \beta_3 I_h^*} - \frac{\beta_1 \beta_3 Q_1 Q_2 \mu_h^2 I_h^*}{b_2 \beta_2 \beta_3 + Q_1 \beta_1 \gamma_v + Q_1 \beta_1 \beta_3 I_h^*} > 0$$

$$\begin{aligned}
& \frac{Q_2\mu_h^2(Q_1\gamma_v + \beta_3Q_1I_h^*)(b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1\gamma_v + Q_1\beta_1\beta_3I_h^*)}{(Q_1\gamma_v + \beta_3Q_1I_h^*)(b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1\gamma_v + Q_1\beta_1\beta_3I_h^*)} + \\
& \frac{b_2\beta_2\beta_3Q_2\mu_hI_h^*(b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1\gamma_v + Q_1\beta_1\beta_3I_h^*)}{(Q_1\gamma_v + \beta_3Q_1I_h^*)(b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1\gamma_v + Q_1\beta_1\beta_3I_h^*)} + \\
& \frac{\beta_1Q_2\mu_hI_h^*(Q_1\gamma_v + \beta_3Q_1I_h^*)(b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1\gamma_v + Q_1\beta_1\beta_3I_h^*)}{(Q_1\gamma_v + \beta_3Q_1I_h^*)(b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1\gamma_v + Q_1\beta_1\beta_3I_h^*)} - \\
& \frac{\beta_1Q_1Q_2\gamma_v\mu_h^2(Q_1\gamma_v + \beta_3Q_1I_h^*)}{(Q_1\gamma_v + \beta_3Q_1I_h^*)(b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1\gamma_v + Q_1\beta_1\beta_3I_h^*)} - \\
& \frac{\beta_1\beta_3Q_1Q_2\mu_h^2I_h^*(Q_1\gamma_v + \beta_3Q_1I_h^*)}{(Q_1\gamma_v + \beta_3Q_1I_h^*)(b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1\gamma_v + Q_1\beta_1\beta_3I_h^*)} > 0 \\
& (Q_1Q_2\gamma_v\mu_h^2 + \beta_3Q_1Q_2\mu_h^2I_h^*)(b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1\gamma_v + Q_1\beta_1\beta_3I_h^*) + \\
& b_2\beta_2\beta_3Q_2\mu_hI_h^*(b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1\gamma_v + Q_1\beta_1\beta_3I_h^*) + \\
& (\beta_1Q_1Q_2\gamma_v\mu_hI_h^* + \beta_1\beta_3Q_1Q_2\mu_hI_h^{*2}) \\
& (b_2\beta_2\beta_3 + Q_1\beta_1\gamma_v + Q_1\beta_1\beta_3I_h^*) - \\
& \beta_1Q_1Q_2\gamma_v\mu_h^2(Q_1\gamma_v + \beta_3Q_1I_h^*) - \\
& \beta_1\beta_3Q_1Q_2\mu_h^2I_h^*(Q_1\gamma_v + \beta_3Q_1I_h^*) > 0 \\
& b_2\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h^2 + \beta_1Q_1^2Q_2\gamma_v^2\mu_h^2 + \beta_1\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h^2I_h^* + \\
& b_2\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_h^2I_h^* + \beta_1\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h^2I_h^* + \beta_1\beta_3^2Q_1^2Q_2\mu_h^2I_h^{*2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +b_2^2\beta_2^2\beta_3^2Q_2\mu_hI_h^* + b_2\beta_1\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_hI_h^* + \\
& b_2\beta_1\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_hI_h^{*2} + b_2\beta_1\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_hI_h^* + \\
& \beta_1^2Q_1^2Q_2\gamma_v^2\mu_hI_h^* + \beta_1^2\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_hI_h^{*2} + \\
& b_2\beta_1\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_hI_h^{*2} + \beta_1^2\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_hI_h^{*2} + \\
& \beta_1^2\beta_3^2Q_1^2Q_2\mu_hI_h^{*3} - \beta_1Q_1^2Q_2\gamma_v^2\mu_h^2 - \beta_1\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h^2I_h^* - \\
& \beta_1\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h^2I_h^* - \beta_1\beta_3^2Q_1^2Q_2\mu_h^2I_h^{*2} > 0 \\
& \beta_1^2\beta_3^2Q_1^2Q_2\mu_hI_h^{*3} + (\beta_1\beta_3^2Q_1^2Q_2\mu_h^2 + b_2\beta_1\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_h + \\
& \beta_1^2\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h + b_2\beta_1\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_h + \beta_1^2\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h - \\
& \beta_1\beta_3^2Q_1^2Q_2\mu_h^2)I_h^{*2} + (\beta_1\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h^2 + b_2\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_h^2 \\
& + \beta_1\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h^2 + b_2^2\beta_2^2\beta_3^2Q_2\mu_h + b_2\beta_1\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h + \\
& b_2\beta_1\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h + \beta_1^2Q_1^2Q_2\gamma_v^2\mu_h - \beta_1\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h^2 - \\
& \beta_1\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h^2)I_h^* + b_2\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h^2 + \beta_1Q_1^2Q_2\gamma_v^2\mu_h^2 - \\
& \beta_1Q_1^2Q_2\gamma_v^2\mu_h^2 > 0 \\
& \beta_1^2\beta_3^2Q_1^2Q_2\mu_hI_h^{*3} + (2b_2\beta_1\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_h + \\
& 2\beta_1^2\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h)I_h^{*2} + (b_2\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_h^2 + b_2^2\beta_2^2\beta_3^2Q_2\mu_h \\
& + 2b_2\beta_1\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h + \beta_1^2Q_1^2Q_2\gamma_v^2\mu_h)I_h^* +
\end{aligned}$$

$$b_2\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h^2 > 0$$

Kemudian di kedua ruas dikalikan b_1 sehingga persamaan di atas menjadi

$$\begin{aligned} & b_1\beta_1^2\beta_3^2Q_1^2Q_2\mu_hI_h^{*3} + (2b_1b_2\beta_1\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_h + \\ & 2b_1\beta_1^2\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h)I_h^{*2} + (b_1b_2\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_h^2 + \\ & b_1b_2^2\beta_2^2\beta_3^2Q_2\mu_h + 2b_1b_2\beta_1\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h + \\ & b_1\beta_1^2Q_1^2Q_2\gamma_v^2\mu_h)I_h^* + b_1b_2\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h^2 > 0 \end{aligned}$$

Pada kedua ruas akan ditambahkan $(2b_1\beta_1^2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h - 2b_1\beta_1^2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h)I_h^{*2}$, sehingga

$$\begin{aligned} & b_1\beta_1^2\beta_3^2Q_1^2Q_2\mu_hI_h^{*3} + (2b_1b_2\beta_1\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_h + \\ & 2b_1\beta_1^2\beta_3Q_1^2Q_2\gamma_v\mu_h + 2b_1\beta_1^2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h - \\ & 2b_1\beta_1^2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h)I_h^{*2} + (b_1b_2\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_h^2 + \\ & b_1b_2^2\beta_2^2\beta_3^2Q_2\mu_h + 2b_1b_2\beta_1\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h + \\ & b_1\beta_1^2Q_1^2Q_2\gamma_v^2\mu_h)I_h^* + b_1b_2\beta_2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b_1\beta_1^2\beta_3^2Q_1^2Q_2\mu_hI_h^{*3} + [2b_1b_2\beta_1\beta_2\beta_3^2Q_1Q_2\mu_h + \\ & 2b_1\beta_1^2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h(Q_1 - 1) + 2b_1\beta_1^2\beta_3Q_1Q_2\gamma_v\mu_h]I_h^{*2} + \end{aligned}$$

$$(b_1 b_2 \beta_2 \beta_3^2 Q_1 Q_2 \mu_h^2 + b_1 b_2^2 \beta_2^2 \beta_3^2 Q_2 \mu_h + 2b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h + b_1 \beta_1^2 Q_1^2 Q_2 \gamma_v^2 \mu_h) I_h^* + b_1 b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h^2 > 0$$

Pada kedua ruas akan ditambahkan $(b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 Q_2^2 \gamma_v \mu_h - b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 Q_2^2 \gamma_v \mu_h + b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2^2 \gamma_v \mu_h^2 - b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2^2 \gamma_v \mu_h^2) I_h^*$, sehingga

$$b_1 \beta_1^2 \beta_3^2 Q_1^2 Q_2 \mu_h I_h^{*3} + [2b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 Q_1 Q_2 \mu_h + 2b_1 \beta_1^2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h (Q_1 - 1) + 2b_1 \beta_1^2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h] I_h^{*2} + (b_1 b_2 \beta_2 \beta_3^2 Q_1 Q_2 \mu_h^2 + b_1 b_2^2 \beta_2^2 \beta_3^2 Q_2 \mu_h + b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 Q_2^2 \gamma_v \mu_h - b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 Q_2^2 \gamma_v \mu_h + b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2^2 \gamma_v \mu_h^2 - b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2^2 \gamma_v \mu_h^2 + 2b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h + b_1 \beta_1^2 Q_1^2 Q_2 \gamma_v^2 \mu_h) I_h^* + b_1 b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h^2 > 0$$

$$b_1 \beta_1^2 \beta_3^2 Q_1^2 Q_2 \mu_h I_h^{*3} + [2b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 Q_1 Q_2 \mu_h + 2b_1 \beta_1^2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h (Q_1 - 1) + 2b_1 \beta_1^2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h] I_h^{*2} + \{b_1 b_2 \beta_2 \beta_3^2 Q_1 Q_2 \mu_h^2 + b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2^2 \gamma_v \mu_h^2$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{b_1 \beta_1}{Q_1 \mu_h} + \frac{b_1 b_2 \beta_2 \beta_3}{Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h} \right) - 1 \right] + b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2^2 \gamma_v \mu_h^2 - \\
& b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 Q_2^2 \gamma_v \mu_h + 2 b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h + \\
& b_1 \beta_1^2 Q_1^2 Q_2 \gamma_v^2 \mu_h \} I_h^* + b_1 b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h^2 > 0 \\
& b_1 \beta_1^2 \beta_3^2 Q_1^2 Q_2 \mu_h I_h^{*3} + [2 b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 Q_1 Q_2 \mu_h + \\
& 2 b_1 \beta_1^2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h (Q_1 - 1) + 2 b_1 \beta_1^2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h] I_h^{*2} + \\
& [b_1 b_2 \beta_2 \beta_3^2 Q_1 Q_2 \mu_h^2 + b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2^2 \gamma_v \mu_h^2 (R_0 - 1) \\
& + b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2^2 \gamma_v \mu_h^2 - b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 Q_2^2 \gamma_v \mu_h + \\
& 2 b_1 b_2 \beta_1 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h + b_1 \beta_1^2 Q_1^2 Q_2 \gamma_v^2 \mu_h] I_h^* + \\
& b_1 b_2 \beta_2 \beta_3 Q_1 Q_2 \gamma_v \mu_h^2 > 0
\end{aligned}$$

λ_2 akan bernilai real negatif ketika $R_0 > 1$ jika $Q_1 > 1$.

$$\lambda_3 = -\gamma_v < 0$$

$$\lambda_4 = -M_8$$

Karena $M_8 = Q_1 + \frac{M_6 \beta_3 I_h^*}{M_5} + \frac{Q_1 \beta_3 I_h^*}{\gamma_v}$, maka

$$\lambda_4 = -Q_1 - \frac{M_6 \beta_3 I_h^*}{M_5} - \frac{Q_1 \beta_3 I_h^*}{\gamma_v} < 0$$

$$-Q_1 - \frac{M_6\beta_3 I_h^*}{M_5} - \frac{Q_1\beta_3 I_h^*}{\gamma_v} < 0$$

$$-Q_1 - \frac{(M_1\mu_h\beta_1 S_h^* - \mu_h M_2\beta_2 S_h^*)\beta_3 I_h^*}{M_1\mu_h\beta_1 S_h^* - M_1\mu_h Q_2 - \mu_h M_2\beta_1 S_h^*} - \frac{Q_1\beta_3 I_h^*}{\gamma_v} < 0$$

Semua nilai eigen bernilai real negatif ketika $R_0 > 1$ jika $Q_1 > 1$. Hal ini menunjukkan bahwa titik setimbangnya stabil lokal asimtotis.

4.5 Analisa Bifurkasi

Bifurkasi adalah perubahan kualitatif yang disebabkan oleh perubahan parameter. Perubahan kualitatif meliputi perubahan banyaknya titik tetap, perubahan stabilitas, muncul dan hilangnya orbit periodik dari suatu titik tetap (Bifurkasi Hopf). Perubahan stabilitas disebabkan satu atau dua nilai eigen dari suatu persamaan diferensial atau sistem persamaan diferensial.

Pada sub bab ini akan membahas mengenai bagaimana cara menentukan persamaan untuk menemukan kurva bifurkasi dari model interaksi dinamis. Kemudian menyajikannya dalam bentuk kurva dengan menggunakan MATLAB R2010a dan menganalisanya.

Dalam hal ini, menggunakan titik kesetimbangan endemik $f(I_h^*)$ untuk mencari persamaan R_0 yang optimum untuk membuat kurva bifurkasinya. Diketahui $f(I_h^*)$ sebagai berikut.

$$f(I_h^*) = aI_h^2 + bI_h + c = 0$$

dengan $a = \beta_1\beta_3 Q_1 Q_2$, $b = \beta_1 Q_1 Q_2 \gamma_v + b_2\beta_2\beta_3 Q_2 + \beta_3 Q_1 Q_2 \mu_h - b_1\beta_1\beta_3 Q_1$, $c = Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v (1 - R_0)$, dan $R_0 = \frac{b_1}{\mu_h} \left(\frac{\beta_1}{Q_2} + \frac{b_2\beta_2\beta_3}{Q_1 Q_2 \gamma_v} \right)$.

Untuk koefisien a bernilai positif (tidak akan bernilai negatif), sedangkan untuk koefisien c bergantung pada nilai R_0 , jika $R_0 < 1$, maka c bernilai positif, selain itu bernilai negatif. Karena $a > 0$ maka agar penyelesaian dari persamaan di atas bernilai positif bergantung pada nilai b dan c . Untuk $R_0 > 1$,

persamaan di atas menghasilkan dua akar persamaan, salah satunya bernilai positif, sedangkan lainnya negatif.

Dengan mensubstitusikan $R_0 = 1$ pada persamaan $f(I_h^*)$ dan anggap bahwa $c = Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v (1 - R_0) = c^*(1 - R_0)$, maka diperoleh.

$$\begin{aligned} f(I_h^*) &= aI_h^2 + bI_h + c \\ &= aI_h^2 + bI_h + c^*(1 - R_0) \\ &= aI_h^2 + bI_h + c^*(1 - 1) \\ &= aI_h^2 + bI_h \end{aligned}$$

Karena $f(I_h^*) = 0$, maka

$$f(I_h^*) = aI_h^2 + bI_h$$

$$0 = I_h(aI_h + b)$$

Karena $I_h \neq 0$, maka $aI_h + b = 0$, sehingga

$$aI_h + b = 0$$

$$aI_h = -b$$

$$I_h = -\frac{b}{a}$$

$$I = -\frac{b}{a}$$

Hasil perhitungan di atas memiliki penyelesaian tak nol, yaitu

$I = -\frac{b}{a}$ jika dan hanya jika $b < 0$. Untuk $b < 0$ terdapat penyelesaian positif untuk $R_0 = 1$. Hal ini menunjukkan bahwa titik kesetimbangan tersebut bergantung pada R_0 dan terdapat interval terbuka yang memiliki dua akar persamaan positif, yaitu

$$aI_h^2 + bI_h + c = 0$$

$$I_{h(1,2)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sehingga

$$I_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ dan } I_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Untuk $c > 0$ dan salah satunya $b^2 < 4ac$ atau $b \geq 0$, maka persamaan $f(I_h^*)$ menghasilkan penyelesaian tak positif.

Selanjutnya akan dicari persamaan bifurkasi mundur dengan cara mencari titik optimum dari persamaan $f(I_h^*)$

kemudian mensubstitusikan hasilnya ke dalam persamaan $f(I_h^*) = 0$ untuk memperoleh nilai R_c .

Untuk mencari titik optimum dari persamaan $f(I_h^*)$ dengan cara menurunkan fungsi persamaan $f(I_h^*)$ terhadap I_h^* sama dengan nol, sehingga

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(I_h^*)}{\partial I_h^*} &= 0 \\ \frac{\partial (aI_h^{*2} + bI_h^* + c)}{\partial I_h^*} &= 0 \\ 2aI_h^* + b &= 0 \\ 2aI_h^* &= -b \\ I_h^* &= -\frac{b}{2a} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Kemudian mensubstitusikan persamaan (4.39) ke dalam persamaan $f(I_h^*) = 0$.

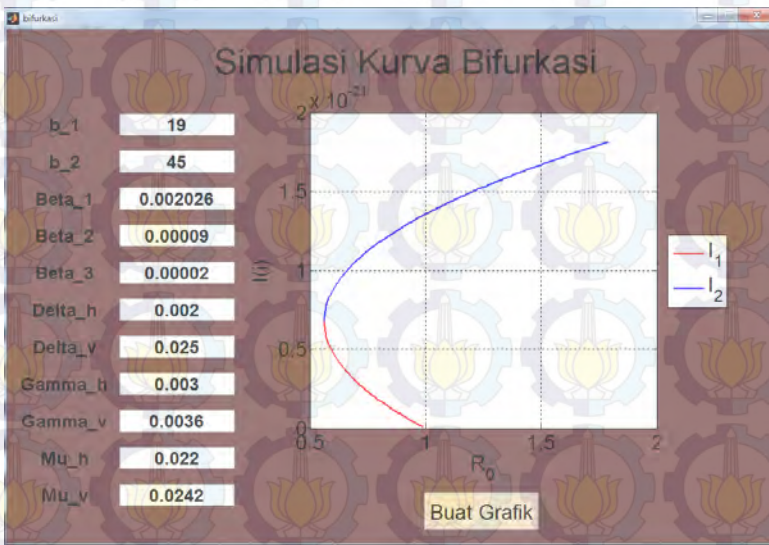
$$\begin{aligned} f(I_h^*) &= 0 \\ aI_h^{*2} + bI_h^* + c &= 0 \\ a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c &= 0 \\ \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c &= 0 \\ \frac{-b^2}{4a} + c &= 0 \\ c &= \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Karena $c = Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v [1 - R_0]$, maka

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v [1 - R_0] &= \frac{b^2}{4a} \\ 1 - R_0 &= \frac{b^2}{4a Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v} \\ R_0 &= 1 - \frac{b^2}{4a Q_1 Q_2 \mu_h \gamma_v} \end{aligned}$$

Karena $R_0 = R_c$, sehingga penyelesaian untuk nilai kritis dari R_c , diberikan $R_c = 1 - \frac{b^2}{4aQ_1Q_2\mu_h\gamma_v}$. Bifurkasi mundur terjadi ketika R_0 ada dan $R_c < R_0$ dengan batasan bahwa diskriminan dari akar persamaan $f(I_h^*)$ positif, sehingga diperoleh $R_c < R_0 < 1$.

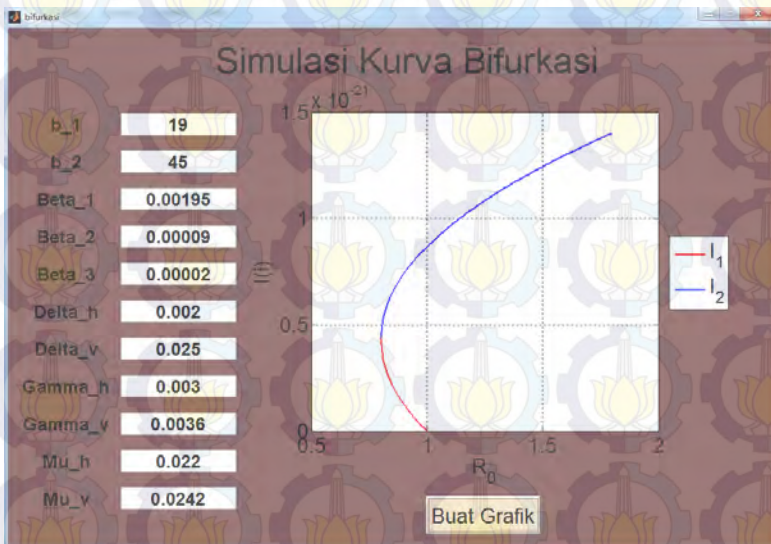
Selanjutnya setelah diperoleh persamaan R_0 , I_h , I_1 , dan I_2 akan disimulasikan dengan menggunakan MATLAB R2010a yang menghasilkan kurva bifurkasi dengan sumbu (x, y) merupakan $(R_0, I_{(i)})$. Di bawah ini merupakan kurva bifurkasi hasil dari simulasi dengan menggunakan nilai parameter $b_1 = 19$, $b_2 = 45$, $\beta_1 = 0.002026$, $\beta_2 = 0.00009$, $\beta_3 = 0.00002$, $\delta_h = 0.002$, $\delta_v = 0.025$, $\gamma_h = 0.003$, $\gamma_v = 0.0036$, $\mu_h = 0.022$, dan $\mu_v = 0.0242$.



Gambar 4.2 Kurva Bifurkasi Dengan Parameter $b_1 = 19$, $b_2 = 45$, $\beta_1 = 0.002026$, $\beta_2 = 0.00009$, $\beta_3 = 0.00002$, $\delta_h = 0.002$, $\delta_v = 0.025$, $\gamma_h = 0.003$, $\gamma_v = 0.0036$, $\mu_h = 0.022$, dan $\mu_v = 0.0242$.

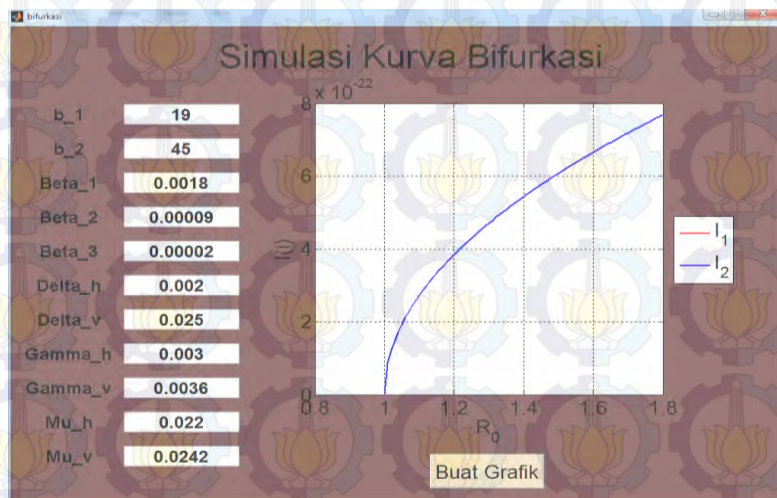
Pada Gambar 4.1 menunjukkan bahwa telah terjadi bifurkasi mundur dengan $R_0 < 1$. Terdapat dua titik tetap, yaitu di titik 1 dan 0.5619. Pada titik 1 terjadi bifurkasi Transkritikal, sedangkan pada titik 0.5619 terjadi bifurkasi *Saddle Node*. Pada saat $R_0 < 0.5619$ tidak terjadi penyebaran penyakit, sedangkan $0.5619 < R_0 < 1$ yang ditunjukkan oleh I_1 merupakan titik endemik tak stabil sehingga pada fase ini terjadi penularan (endemik) yang sulit diberantas dan untuk $R_0 > 0.5619$ yang ditunjukkan oleh I_2 merupakan titik endemik stabil sehingga walaupun terjadi penularan (endemik) masih bisa diatasi.

Kemudian akan dilihat keterkaitan kestabilan model dan keadaan kurva bifurkasi (mundur atau maju) antara pergerakan kurva dengan perubahan parameter. Dalam hal ini nilai parameter yang berubah hanya β_1 dan β_2 , sedangkan untuk parameter lainnya konstan (sama seperti nilai parameter yang ditunjukkan oleh Gambar 4.1).



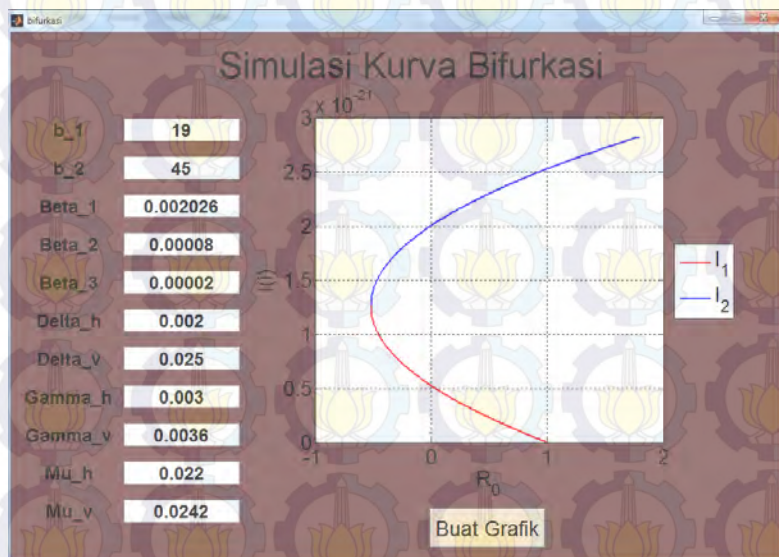
Gambar 4.3 Kurva Bifurkasi Dengan $\beta_1 = 0.00195$

Pada Gambar 4.2 menunjukkan bahwa telah terjadi bifurkasi mundur dengan $R_0 < 1$. Terdapat dua titik tetap, yaitu di titik 1 dan 0.7991. Pada titik 1 terjadi bifurkasi Transkritikal, sedangkan pada titik 0.7991 terjadi bifurkasi *Saddle Node*. Pada saat $R_0 < 0.7991$ tidak terjadi penyebaran penyakit, sedangkan $0.7991 \leq R_0 \leq 1$ yang ditunjukkan oleh I_1 merupakan titik endemik tak stabil sehingga pada fase ini terjadi penularan (endemik) yang sulit diberantas dan untuk $R_0 > 0.7991$ yang ditunjukkan oleh I_2 merupakan titik endemik stabil sehingga walaupun terjadi penularan (endemik) masih bisa diatasi. Jika dibandingkan dengan Gambar 4.1, terlihat bahwa lengkungan yang menunjukkan bifurkasi mundur mendekati satu yang menandakan bahwa kurva mendekati posisi untuk bifurkasi maju dan mendekati dominan stabil untuk titik endemiknya sehingga penyakit dapat ditangani walau terjadi penyebaran endemik. Namun jika $\beta_1 > 0.002026$, lengkungan titik tetap pada bifurkasi *Saddle Node* akan semakin menjauhi $R_0 < 0.5619$ yang menandakan bahwa titik endemik semakin tak stabil sehingga wabah endemik semakin sulit diberantas.



Gambar 4.4 Kurva Bifurkasi Dengan $\beta_1 = 0.0018$

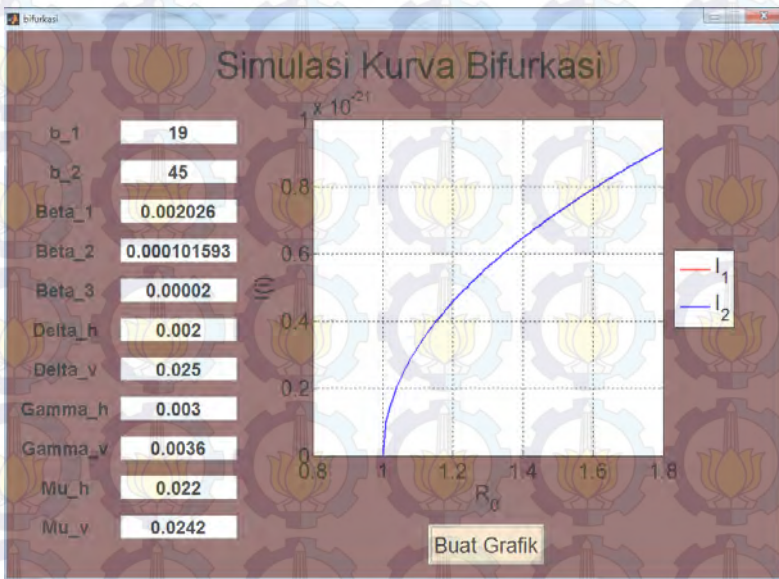
Pada Gambar 4.3 menunjukkan bahwa telah terjadi bifurkasi maju dengan $R_0 > 1$. Terdapat satu titik tetap, yaitu di titik 1. Pada titik 1 terjadi bifurkasi Transkritikal. Pada saat $R_0 < 1$ tidak terjadi penyebaran penyakit, sedangkan $R_0 > 1$ yang ditunjukkan oleh I_2 merupakan titik endemik stabil sehingga walaupun terjadi penularan (endemik) masih bisa diatasi. Jika dibandingkan dengan Gambar 4.2, terlihat bahwa jika $0.0018 \leq \beta_1 \leq 0.002026$, maka lengkungan yang menunjukkan bifurkasi mundur mendekati satu yang menandakan bahwa kurva mendekati posisi untuk bifurkasi maju dan mendekati dominan stabil untuk titik endemiknya sehingga penyakit dapat ditangani walau terjadi penyebaran endemik.



Gambar 4.5 Kurva Bifurkasi Dengan $\beta_2 = 0.00008$

Pada Gambar 4.4 menunjukkan bahwa telah terjadi bifurkasi mundur dengan $R_0 < 1$. Terdapat dua titik tetap, yaitu di titik 1 dan -0.5197 . Pada titik 1 terjadi bifurkasi Transkritikal, sedangkan pada titik 0.7991 terjadi bifurkasi *Saddle Node*. Pada

saat $R_0 < -0.5197$ tidak terjadi penyebaran penyakit, sedangkan $-0.5197 < R_0 < 1$ yang ditunjukkan oleh I_1 merupakan titik endemik tak stabil sehingga pada fase ini terjadi penularan (endemik) yang sulit diberantas dan untuk $R_0 > -0.5197$ yang ditunjukkan oleh I_2 merupakan titik endemik stabil sehingga walaupun terjadi penularan (endemik) masih bisa diatasi. Jika dibandingkan dengan Gambar 4.1, terlihat bahwa lengkungan yang menunjukkan bifurkasi mundur makin mundur dan tentunya hal ini menunjukkan ketidakstabilan titik endemik semakin besar, sehingga penyakit sulit diberantas. Jika $\beta_2 < 0.00009$, maka lengkungan titik tetap pada bifurkasi *Saddle Node* akan semakin menjauhi $R_0 < 0.5619$ yang menandakan bahwa titik endemik semakin tak stabil sehingga wabah endemik semakin sulit diberantas.



Gambar 4.6 Kurva Bifurkasi Dengan $\beta_2 = 0.000101593$

Pada Gambar 4.5 menunjukkan bahwa telah terjadi bifurkasi maju dengan $R_0 > 1$. Terdapat satu titik tetap, yaitu di titik 1. Pada titik 1 terjadi bifurkasi Transkritikal. Pada saat $R_0 < 1$ tidak terjadi penyebaran penyakit, sedangkan $R_0 > 1$ yang ditunjukkan oleh I_2 merupakan titik endemik stabil sehingga walaupun terjadi penularan (endemik) masih bisa diatasi. Jika dibandingkan dengan Gambar 4.2, terlihat bahwa jika $0.00009 \leq \beta_2 \leq 0.000101593$, maka lengkungan yang menunjukkan bifurkasi mundur mendekati satu yang menandakan bahwa kurva mendekati posisi untuk bifurkasi maju dan mendekati dominan stabil untuk titik endemiknya sehingga penyakit dapat ditangani walau terjadi penyebaran endemik.

Dari beberapa contoh yang telah disebutkan di atas, maka dapat disajikan dalam bentuk tabel keterkaitan antara perubahan nilai parameter dengan keeksistensian bifurkasi sebagai berikut.

| β_1 | β_2 | Nilai Titik Puncak | Keterangan Bifurkasi |
|-----------|-------------|--------------------|----------------------|
| 0.002026 | 0.00009 | 0.5619 | Mundur |
| 0.00195 | 0.00009 | 0.7991 | Mundur |
| 0.0018 | 0.00009 | 1 | Maju |
| 0.002026 | 0.00008 | -0.5197 | Mundur |
| 0.002026 | 0.000101593 | 1 | Maju |
| 0.0019 | 0.000095 | 1 | Maju |

Tabel 4.1 Keterkaitan Antara Perubahan Nilai Parameter Dengan Keeksistensian Bifurkasi

4.6 Solusi Numerik dan Simulasi

Pada sub bab ini akan membahas bagaimana cara untuk memperoleh solusi numerik dari persamaan model interaksi dinamis dan simulasi numeriknya. Hal ini bertujuan untuk memudahkan dalam menganalisa model dan untuk mengetahui selisih atau error antara nilai eksak dengan nilai numerik.

Penyelesaian numerik yang digunakan adalah metode Runge-Kutta orde empat. Metode Runge-Kutta mencapai keakuratan dari suatu pendekatan Taylor tanpa memerlukan turunan-turunan tingkat tinggi. Metode Runge-kutta orde 4 adalah satu dari metode yang banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan differensial. Metode ini mempunyai suatu galat pemotongan h^4 . Integrasi numerik dari persamaan dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dinyatakan sebagai berikut:

Persamaan Numerik Runge-Kutta untuk persamaan (4.1) – (4.5)

$$S_{h(n+1)} = S_{h0} + \frac{1}{6}(k_{1,S_h} + 2k_{2,S_h} + 2k_{3,S_h} + k_{4,S_h})$$

$$I_{h(n+1)} = I_{h0} + \frac{1}{6}(k_{1,I_h} + 2k_{2,I_h} + 2k_{3,I_h} + k_{4,I_h})$$

$$R_{h(n+1)} = R_{R0} + \frac{1}{6}(k_{1,R_h} + 2k_{2,R_h} + 2k_{3,R_h} + k_{4,R_h})$$

$$S_{v(n+1)} = S_{v0} + \frac{1}{6}(k_{1,S_v} + 2k_{2,S_v} + 2k_{3,S_v} + k_{4,S_v})$$

$$I_{v(n+1)} = I_{v0} + \frac{1}{6}(k_{1,I_v} + 2k_{2,I_v} + 2k_{3,I_v} + k_{4,I_v})$$

Dengan

$$\begin{aligned} k_{1,S_h} &= h f(t_0, S_{h0}, I_{h0}, R_{h0}, S_{v0}, I_{v0}) \\ &= h (b_1 - \mu_h S_{h0} - \beta_2 S_{h0} I_{v0} - \beta_1 S_{h0} I_{h0} + \lambda_h R_{h0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{1,I_h} &= h f(t_0, S_{h0}, I_{h0}, R_{h0}, S_{v0}, I_{v0}) \\ &= h (\beta_2 S_{h0} I_{v0} + \beta_1 S_{h0} I_{h0} - \mu_h I_{h0} - \delta_h I_{h0} - \gamma_h I_{h0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{1,R_h} &= h f(t_0, S_{h0}, I_{h0}, R_{h0}, S_{v0}, I_{v0}) \\ &= h (\gamma_h I_{h0} - \mu_h R_{h0} - \lambda_h R_{h0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{1,S_v} &= h f(t_0, S_{h0}, I_{h0}, R_{h0}, S_{v0}, I_{v0}) \\ &= h (b_2 - \gamma_v S_{v0} - \beta_3 S_{v0} I_{h0}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{1,I_v} &= h f(t_0, S_{h_0}, I_{h_0}, R_{h_0}, S_{v_0}, I_{v_0}) \\
&= h (\beta_3 S_{v_0} I_{h_0} + \mu_v I_{v_0} - \gamma_v I_{v_0} - \delta_v I_{v_0})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,S_h} &= h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_{h_0} + \frac{k_{1,S_h}}{2}, I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2}, R_{h_0} + \frac{k_{1,R_h}}{2}, S_{v_0} + \frac{k_{1,S_v}}{2}, I_{v_0} + \frac{k_{1,I_v}}{2}\right) \\
&= h \left[b_1 - \mu_h \left(S_{h_0} + \frac{k_{1,S_h}}{2} \right) - \beta_2 \left(S_{h_0} + \frac{k_{1,S_h}}{2} \right) \right. \\
&\quad \left(I_{v_0} + \frac{k_{1,I_v}}{2} \right) - \beta_1 \left(S_{h_0} + \frac{k_{1,S_h}}{2} \right) \left(I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2} \right) + \\
&\quad \left. \lambda_h \left(R_{h_0} + \frac{k_{1,R_h}}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,I_h} &= h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_{h_0} + \frac{k_{1,S_h}}{2}, I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2}, R_{h_0} + \frac{k_{1,R_h}}{2}, S_{v_0} + \frac{k_{1,S_v}}{2}, I_{v_0} + \frac{k_{1,I_v}}{2}\right) \\
&= h \left[\beta_2 \left(S_{h_0} + \frac{k_{1,S_h}}{2} \right) \left(I_{v_0} + \frac{k_{1,I_v}}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. \beta_1 \left(S_{h_0} + \frac{k_{1,S_h}}{2} \right) \left(I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2} \right) - \mu_h \left(I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \delta_h \left(I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2} \right) - \gamma_h \left(I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,R_h} &= h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_{h_0} + \frac{k_{1,S_h}}{2}, I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2}, R_{h_0} + \frac{k_{1,R_h}}{2}, S_{v_0} + \frac{k_{1,S_v}}{2}, I_{v_0} + \frac{k_{1,I_v}}{2}\right) \\
&= h \left[\gamma_h \left(I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2} \right) - \mu_h \left(R_{h_0} + \frac{k_{1,R_h}}{2} \right) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_h \left(R_{h_0} + \frac{k_{1,Rh}}{2} \right) \Bigg] \\
k_{2,S_v} &= h f \left(t_0 + \frac{h}{2}, S_{h_0} + \frac{k_{1,S_h}}{2}, I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2}, R_{h_0} + \frac{k_{1,Rh}}{2}, S_{v_0} + \right. \\
& \quad \left. \frac{k_{1,S_v}}{2}, I_{v_0} + \frac{k_{1,I_v}}{2} \right) \\
&= h \left[b_2 - \gamma_v \left(S_{v_0} + \frac{k_{1,S_v}}{2} \right) - \beta_3 \left(S_{v_0} + \frac{k_{1,S_v}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left. \left(I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{2,I_v} &= h f \left(t_0 + \frac{h}{2}, S_{h_0} + \frac{k_{1,S_h}}{2}, I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2}, R_{h_0} + \frac{k_{1,Rh}}{2}, S_{v_0} + \right. \\
& \quad \left. \frac{k_{1,S_v}}{2}, I_{v_0} + \frac{k_{1,I_v}}{2} \right) \\
&= h \left[\beta_3 \left(S_{v_0} + \frac{k_{1,S_v}}{2} \right) \left(I_{h_0} + \frac{k_{1,I_h}}{2} \right) + \mu_v \left(I_{v_0} + \frac{k_{1,I_v}}{2} \right) - \right. \\
& \quad \left. \gamma_v \left(I_{v_0} + \frac{k_{1,I_v}}{2} \right) - \delta_v \left(I_{v_0} + \frac{k_{1,I_v}}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,S_h} &= h f \left(t_0 + \frac{h}{2}, S_{h_0} + \frac{k_{2,S_h}}{2}, I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2}, R_{h_0} + \frac{k_{2,Rh}}{2}, S_{v_0} + \right. \\
& \quad \left. \frac{k_{2,S_v}}{2}, I_{v_0} + \frac{k_{2,I_v}}{2} \right) \\
&= h \left[b_1 - \mu_h \left(S_{h_0} + \frac{k_{2,S_h}}{2} \right) - \beta_2 \left(S_{h_0} + \frac{k_{2,S_h}}{2} \right) \right. \\
& \quad \left(I_{v_0} + \frac{k_{2,I_v}}{2} \right) - \beta_1 \left(S_{h_0} + \frac{k_{2,S_h}}{2} \right) \left(I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2} \right) + \\
& \quad \left. \lambda_h \left(R_{h_0} + \frac{k_{2,Rh}}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{3,I_h} &= h f \left(t_0 + \frac{h}{2}, S_{h_0} + \frac{k_{2,S_h}}{2}, I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2}, R_{h_0} + \frac{k_{2,R_h}}{2}, S_{v_0} + \frac{k_{2,S_v}}{2}, I_{v_0} + \frac{k_{2,I_v}}{2} \right) \\
 &= h \left[\beta_2 \left(S_{h_0} + \frac{k_{2,S_h}}{2} \right) \left(I_{v_0} + \frac{k_{2,I_v}}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \beta_1 \left(S_{h_0} + \frac{k_{2,S_h}}{2} \right) \left(I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2} \right) - \mu_h \left(I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2} \right) - \\
 &\quad \left. \delta_h \left(I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2} \right) - \gamma_h \left(I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{3,R_h} &= h f \left(t_0 + \frac{h}{2}, S_{h_0} + \frac{k_{2,S_h}}{2}, I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2}, R_{h_0} + \frac{k_{2,R_h}}{2}, S_{v_0} + \frac{k_{2,S_v}}{2}, I_{v_0} + \frac{k_{2,I_v}}{2} \right) \\
 &= h \left[\gamma_h \left(I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2} \right) - \mu_h \left(R_{h_0} + \frac{k_{2,R_h}}{2} \right) - \right. \\
 &\quad \left. \lambda_h \left(R_{h_0} + \frac{k_{2,R_h}}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{3,S_v} &= h f \left(t_0 + \frac{h}{2}, S_{h_0} + \frac{k_{2,S_h}}{2}, I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2}, R_{h_0} + \frac{k_{2,R_h}}{2}, S_{v_0} + \frac{k_{2,S_v}}{2}, I_{v_0} + \frac{k_{2,I_v}}{2} \right) \\
 &= h \left[b_2 - \gamma_v \left(S_{v_0} + \frac{k_{2,S_v}}{2} \right) - \beta_3 \left(S_{v_0} + \frac{k_{2,S_v}}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left(I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{3,I_v} &= h f\left(t_0 + \frac{h}{2}, S_{h_0} + \frac{k_{2,S_h}}{2}, I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2}, R_{h_0} + \frac{k_{2,R_h}}{2}, S_{v_0} + \frac{k_{2,S_v}}{2}, I_{v_0} + \frac{k_{2,I_v}}{2}\right) \\
&= h \left[\beta_3 \left(S_{v_0} + \frac{k_{2,S_v}}{2} \right) \left(I_{h_0} + \frac{k_{2,I_h}}{2} \right) + \mu_v \left(I_{v_0} + \frac{k_{2,I_v}}{2} \right) - \right. \\
&\quad \left. \gamma_v \left(I_{v_0} + \frac{k_{2,I_v}}{2} \right) - \delta_v \left(I_{v_0} + \frac{k_{2,I_v}}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,S_h} &= h f(t_0, S_{h_0} + k_{3,S_h}, I_{h_0} + k_{3,I_h}, R_{h_0} + k_{3,R_h}, S_{v_0} + k_{3,S_v}, \\
&\quad I_{v_0} + k_{3,I_v}) \\
&= h [b_1 - \mu_h(S_{h_0} + k_{3,S_h}) - \beta_2(S_{h_0} + k_{3,S_h})(I_{v_0} + k_{3,I_v}) \\
&\quad - \beta_1(S_{h_0} + k_{3,S_h})(I_{h_0} + k_{3,I_h}) + \lambda_h(R_{h_0} + k_{3,R_h})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,I_h} &= h f(t_0, S_{h_0} + k_{3,S_h}, I_{h_0} + k_{3,I_h}, R_{h_0} + k_{3,R_h}, S_{v_0} + k_{3,S_v}, \\
&\quad I_{v_0} + k_{3,I_v}) \\
&= h [\beta_2(S_{h_0} + k_{3,S_h})(I_{v_0} + k_{3,I_v}) + \beta_1(S_{h_0} + k_{3,S_h}) \\
&\quad (I_{h_0} + k_{3,I_h}) - \mu_h(I_{h_0} + k_{3,I_h}) - \delta_h(I_{h_0} + k_{3,I_h}) - \\
&\quad \gamma_h(I_{h_0} + k_{3,I_h})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,R_h} &= h f(t_0, S_{h_0} + k_{3,S_h}, I_{h_0} + k_{3,I_h}, R_{h_0} + k_{3,R_h}, S_{v_0} + k_{3,S_v}, \\
&\quad I_{v_0} + k_{3,I_v}) \\
&= h [\gamma_h(I_{h_0} + k_{3,I_h}) - \mu_h(R_{h_0} + k_{3,R_h}) - \\
&\quad \lambda_h(R_{h_0} + k_{3,R_h})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,S_v} &= h f(t_0, S_{h_0} + k_{3,S_h}, I_{h_0} + k_{3,I_h}, R_{h_0} + k_{3,R_h}, S_{v_0} + k_{3,S_v}, \\
&\quad I_{v_0} + k_{3,I_v}) \\
&= h [b_2 - \gamma_v(S_{v_0} + k_{3,S_v}) - \beta_3(S_{v_0} + k_{3,S_v})(I_{h_0} + k_{3,I_h})]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{4,I_v} &= h f(t_0, S_{h_0} + k_{3,S_h}, I_{h_0} + k_{3,I_h}, R_{h_0} + k_{3,R_h}, S_{v_0} + k_{3,S_v}, \\
&\quad I_{v_0} + k_{3,I_v}) \\
&= h[\beta_3(S_{v_0} + k_{3,S_v})(I_{h_0} + k_{3,I_h}) + \mu_v(I_{v_0} + k_{3,I_v}) - \\
&\quad \gamma_v(I_{v_0} + k_{3,I_v}) - \delta_v(I_{v_0} + k_{3,I_v})]
\end{aligned}$$

Dengan h adalah langkah waktu dan $f(t_0, S_{h_0}, I_{h_0}, R_{h_0}, S_{v_0}, I_{v_0})$ adalah fungsi sistem model interaksi dinamis.

Untuk menghitung penyelesaian numerik dari model interaksi dinamis, pertama-tama yang dihitung adalah nilai $R_{h(n+1)}$ dan $I_{v(n+1)}$ untuk mencari nilai $S_{h(n+1)}$. Kemudian mencari nilai $I_{h(n+1)}$ dengan menggunakan nilai $S_{h(n+1)}$ dan $I_{v(n+1)}$. Selanjutnya dicari nilai $S_{v(n+1)}$ dengan menggunakan nilai $I_{h(n+1)}$.

Setelah diperoleh persamaan numerik Runge-Kutta dari sistem persamaan model interaksi dinamis, selanjutnya akan dibuat simulasinya dengan menggunakan MATLAB R2010a. Dalam hal ini yang akan disimulasikan adalah bentuk grafik persebaran populasi individu dan *vector*, serta menghitung nilai titik kesetimbangannya dari model interaksi dinamis.

Sebelum menghitung titik kesetimbangan, akan ditentukan apakah titik kesetimbangan yang akan dihitung merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit atau titik kesetimbangan bebas penyakit berdasarkan nilai R_0 . Jika $R_0 < 1$, maka yang akan dihitung adalah titik kesetimbangan bebas penyakit dan sifatnya stabil. Sedangkan jika $R_0 > 1$, maka yang akan dihitung adalah titik kesetimbangan endemik. Karena titik kesetimbangan endemik disajikan dalam fungsi $f(I_h^*)$ yang berbentuk fungsi kuadrat, maka pertama-tama akan dicari nilai akar persamaan kuadrat dari $f(I_h^*)$ dan tentunya hasil akar-akar tersebut akan mempengaruhi keberadaan titik kesetimbangan endemik dan kestabilannya. Diketahui bahwa

$$f(I_h^*) = aI_h^2 + bI_h + c = 0$$

dengan $a = \beta_1\beta_3Q_1Q_2$, $b = \beta_1Q_1Q_2\gamma_v + b_2\beta_2\beta_3Q_2 + \beta_3Q_1Q_2\mu_h - b_1\beta_1\beta_3Q_1$, $c = Q_1Q_2\mu_h\gamma_v[1 - R_0]$, dan $R_0 = \frac{b_1}{\mu_h} \left(\frac{\beta_1}{Q_2} + \frac{b_2\beta_2\beta_3}{Q_1Q_2\gamma_v} \right)$. Sehingga diperoleh akar-akar persamaan, antara lain $I_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ dan $I_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Karena terdapat dua akar persamaan, maka terdapat tiga kondisi untuk keberadaan titik endemik dan kestabilannya yang disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut.

| Syarat | Kondisi |
|-----------------|---|
| $b^2 - 4ac > 0$ | Terdapat dua titik kesetimbangan endemik, salah satunya bernilai real positif, sedangkan lainnya bernilai real negatif. Untuk akar yang bernilai real positif merupakan titik kesetimbangan endemik yang stabil. Sedangkan untuk akar yang bernilai real negatif merupakan titik kesetimbangan endemik yang tak stabil. |
| $b^2 - 4ac = 0$ | Terdapat satu titik kesetimbangan endemik dan sifatnya stabil. Hal ini dikarenakan pada kondisi ini nilai $I_1 = I_2$. |
| $b^2 - 4ac < 0$ | Tidak ada titik kesetimbangan endemik, sehingga terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit yang tak stabil. |

Tabel 4.2 Syarat dan Kondisi Untuk Titik Kesetimbangan Endemik Berdasarkan Nilai Akar Persamaan $f(I_h^*)$

Untuk menampilkan grafik persebaran populasi dengan menggunakan metode numerik Runge-Kutta orde empat. Dalam hal ini akan diamati pergerakan grafik dari persebaran populasi, baik dari individu maupun *vector* selama empat hari tiap jam waktu. Sehingga *looping* program berjalan dari satu sampai sembilan puluh enam dan nilai h adalah 0.04167, sedangkan untuk nilai awal dan parameternya disajikan dalam tabel berikut.

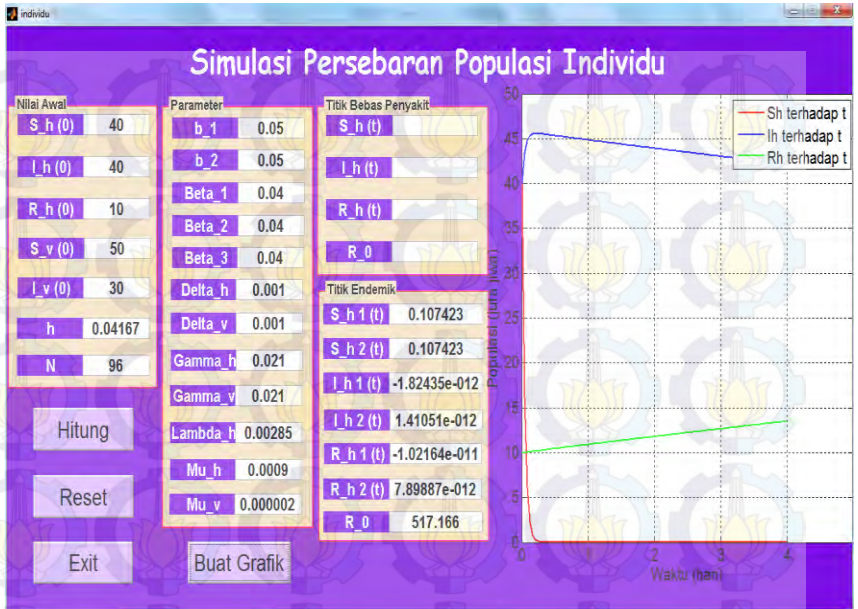
| Nilai Awal | Nilai |
|------------|-------|
| $S_h(0)$ | 40 |
| $I_h(0)$ | 40 |
| $R_h(0)$ | 10 |
| $S_v(0)$ | 50 |
| $I_v(0)$ | 30 |

Tabel 4.3 Nilai Awal Untuk persebaran Populasi Individu dan Vector

| Parameter | Nilai |
|-------------|----------|
| b_1 | 0.05 |
| b_2 | 0.05 |
| β_1 | 0.04 |
| β_2 | 0.04 |
| β_3 | 0.04 |
| δ_h | 0.001 |
| δ_v | 0.001 |
| γ_h | 0.021 |
| γ_v | 0.021 |
| λ_h | 0.00285 |
| μ_h | 0.0009 |
| μ_v | 0.000002 |

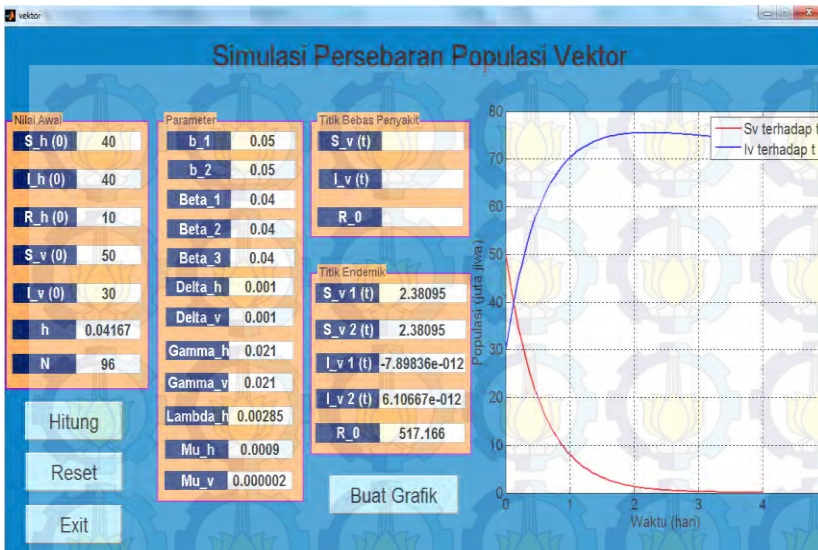
Tabel 4.4 Nilai Parameter Untuk Persebaran Populasi dan Vector

Dengan nilai parameter di atas menghasilkan $R_0 > 1$, sehingga dapat dikatakan bahwa persamaan memiliki dua titik kesetimbangan endemik yang bersifat stabil untuk akar real positif dan tak stabil untuk akar real negatif, selanjutnya akan ditampilkan grafik persebaran populasi dengan menggunakan persamaan numerik Runge-Kuta dengan menginputkan nilai awal, parameter, dan h sebagai berikut.



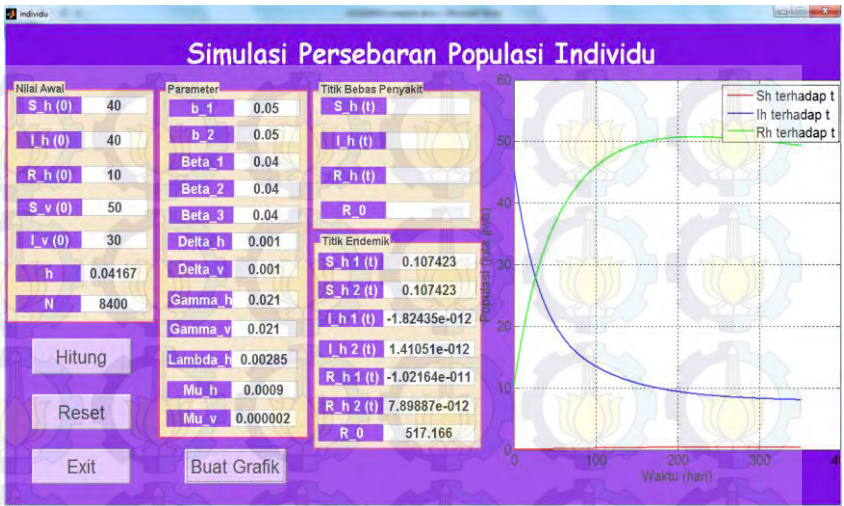
Gambar 4.7 Grafik Persebaran Populasi Individu Saat $N = 96$

Pada Gambar 4.7 terlihat bahwa kelompok individu *susceptible* mengalami penurunan tajam saat kelompok individu *infected* meningkat, sedangkan untuk kelompok individu *recovered* mengalami peningkatan yang lambat ketika terjadi kenaikan jumlah kelompok individu *infected*.

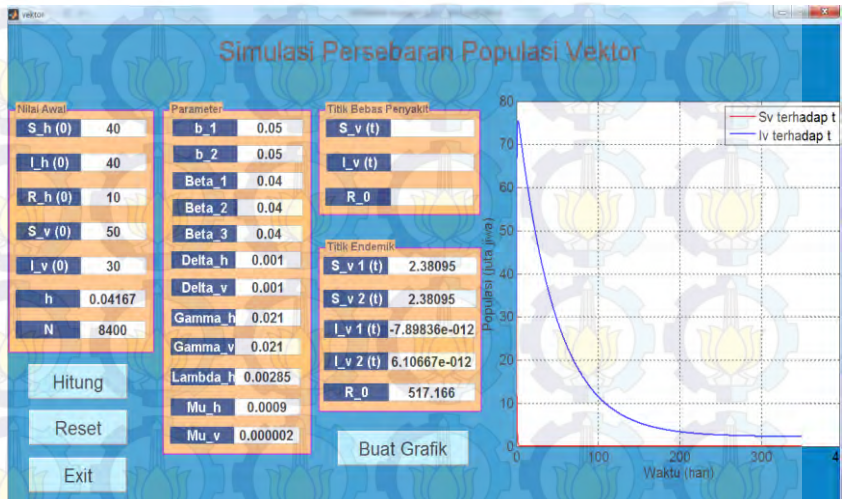


Gambar 4.8 Grafik Persebaran Populasi Vector Saat $N = 96$

Sedangkan pada Gambar 4.8 terlihat bahwa kelompok *vector susceptible* mengalami penurunan selaras saat kelompok *vector infected* mengalami kenaikan. Adapun jumlah populasi kelompok *vector infected* meningkat karena berinteraksi dengan kelompok individu *susceptible* dan begitu pula sebaliknya, jumlah populasi kelompok individu *infected* meningkat karena berinteraksi dengan kelompok *vector susceptible*. Jika diteruskan sampai 350 hari, maka akan diperoleh pergerakan grafik yang konstan seperti Gambar 4.8 dan Gambar 4.9.



Gambar 4.9 Grafik Persebaran Populasi Individu
Pada Saat $N = 8400$



Gambar 4.10 Grafik Persebaran Vector Pada Saat $N = 8400$



LAMPIRAN A

Kurva Bifurkasi

```
str=get(handles.b_1, 'string');
b_1=str2num(str);
str=get(handles.b_2, 'string');
b_2=str2num(str);
str=get(handles.Beta_1, 'string');
beta_1=str2num(str);
str=get(handles.Beta_2, 'string');
beta_2=str2num(str);
str=get(handles.Beta_3, 'string');
beta_3=str2num(str);
str=get(handles.Delta_h, 'string');
delta_h=str2num(str);
str=get(handles.Delta_v, 'string');
delta_v=str2num(str);
str=get(handles.Gamma_h, 'string');
gamma_h=str2num(str);
str=get(handles.Gamma_v, 'string');
gamma_v=str2num(str);
str=get(handles.Mu_h, 'string');
mu_h=str2num(str);
str=get(handles.Mu_v, 'string');
mu_v=str2num(str);
a=beta_1*beta_3*(delta_v+gamma_v-
mu_v)*(mu_h+delta_h+gamma_h);
a
b=beta_1*(delta_v+gamma_v-
mu_v)*(mu_h+delta_h+gamma_h)*gamma_v+b_2*beta_2
*beta_3*(mu_h+delta_h+gamma_h)+beta_3*(delta_v+
gamma_v-mu_v)*(mu_h+delta_h+gamma_h)*mu_h-
b_1*beta_1*beta_3*(delta_v+gamma_v-mu_v);
b
cstar=(delta_v+gamma_v-
mu_v)*(mu_h+delta_h+gamma_h)*mu_h*gamma_v;
cstar
I=-b/(2*a);
R_c=1-(b^2/(4*a*cstar));
```



```

R_0=R_c:0.01:1.8;
i=1;
R_c
for k=R_c:0.01:1.8
    c=cstar*(1-k);
    sqrt(b^2-4*a*c)
    I_2(i)=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/2*a;
    I_2(i)
    I_1temp=(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/2*a;
    I_1temp
    if I_1temp>=0
        I_1(i)=I_1temp;
    end
    i=i+1;
end
PI_1=length(I_1);
axes(handles.axes1);
plot(R_0(1:PI_1),I_1,'r',R_0,I_2,'b',
'LineWidth',2);
xlabel('R_0');
ylabel('I(i)');
legend('I_1','I_2','FontSize',20,'location','ea
stoutside');
grid on

```

LAMPIRAN B

Grafik Persebaran Populasi Individu

```

handles=guidata(gcbo);
Sh(1)=str2double(get(handles.Sh0,'String'));
Ih(1)=str2double(get(handles.Ih0,'String'));
Rh(1)=str2double(get(handles.Rh0,'String'));
Sv(1)=str2double(get(handles.Sv0,'String'));
Iv(1)=str2double(get(handles.Iv0,'String'));
h=str2double(get(handles.h,'String'));
N=str2double(get(handles.N,'String'));
b1=str2double(get(handles.b1,'String'));
b2=str2double(get(handles.b2,'String'));
betal=str2double(get(handles.betal,'String'));

```

```

beta2=str2double(get(handles.beta2,'String'));
beta3=str2double(get(handles.beta3,'String'));
deltah=str2double(get(handles.deltah,'String'))
;
deltav=str2double(get(handles.deltav,'String'))
;
gammah=str2double(get(handles.gammah,'String'))
;
gammav=str2double(get(handles.gammav,'String'))
;
lambdah=str2double(get(handles.lambdah,'String'
));
muh=str2double(get(handles.muh,'String'));
muv=str2double(get(handles.muv,'String'));

for i=1:N

    Sh(1)>=0;
    Ih(1)>=0;
    Rh(1)>=0;
    Sv(1)>=0;
    Iv(1)>=0;

    K1_Sh(i) = h*(b1-(muh*Sh(i))-
(beta2*Sh(i)*Iv(i))-
(beta1*Sh(i)*Ih(i))+(lambdah*Rh(i)));
    K1_Ih(i) =
h*((beta2*Sh(i)*Iv(i))+(beta1*Sh(i)*Ih(i))-
(muh*Ih(i))-(deltah*Ih(i))-(gammah*Ih(i)));
    K1_Rh(i) = h*((gammah*Ih(i))-(muh*Rh(i))-
(lambdah*Rh(i)));
    K1_Sv(i) = h*(b2-(gammav*Sv(i))-
(beta3*Sv(i)*Ih(i)));
    K1_Iv(i) =
h*((beta3*Sv(i)*Ih(i))+(muh*Iv(i))-
(gammav*Iv(i))-(deltav*Iv(i)));

    K2_Sh(i) = h*(b1-
(muh*(Sh(i)+(K1_Sh(i)/2)))-

```

```

(beta2*(Sh(i)+(K1_Sh(i)/2)))*(Iv(i)+(K1_Iv(i)/2
)))-
(beta1*(Sh(i)+(K1_Sh(i)/2)))*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2
)))+(lambdah*(Rh(i)+(K1_Rh(i)/2)));
    K2_Ih(i) =
h*((beta2*(Sh(i)+(K1_Sh(i)/2))*(Iv(i)+(K1_Iv(i)
/2)))+(beta1*(Sh(i)+(K1_Sh(i)/2))*(Ih(i)+(K1_Ih
(i)/2)))-(muh*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2)))-
(deltah*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2)))-
(gammah*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2))));
    K2_Rh(i) =
h*((gammah*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2)))-
(muh*(Rh(i)+(K1_Rh(i)/2)))-
(lambdah*(Rh(i)+(K1_Rh(i)/2))));
    K2_Sv(i) = h*(b2-
(gammav*(Sv(i)+(K1_Sv(i)/2)))-
(beta3*(Sv(i)+(K1_Sv(i)/2))*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2
))));
    K2_Iv(i) =
h*((beta3*(Sv(i)+(K1_Sv(i)/2))*(Ih(i)+(K1_Ih(i)
/2)))+(muh*(Iv(i)+(K1_Iv(i)/2)))-
(gammav*(Iv(i)+(K1_Iv(i)/2)))-
(deltav*(Iv(i)+(K1_Iv(i)/2))));

    K3_Sh(i) = h*(b1-
(muh*(Sh(i)+(K2_Sh(i)/2)))-
(beta2*(Sh(i)+(K2_Sh(i)/2))*(Iv(i)+(K2_Iv(i)/2
)))-
(beta1*(Sh(i)+(K2_Sh(i)/2))*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2
)))+(lambdah*(Rh(i)+(K2_Rh(i)/2))));
    K3_Ih(i) =
h*((beta2*(Sh(i)+(K2_Sh(i)/2))*(Iv(i)+(K2_Iv(i)
/2)))+(beta1*(Sh(i)+(K2_Sh(i)/2))*(Ih(i)+(K2_Ih
(i)/2)))-(muh*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2)))-
(deltah*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2)))-
(gammah*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2))));
    K3_Rh(i) =
h*((gammah*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2)))-

```

```

(muh*(Rh(i)+(K2_Rh(i)/2)))-
(lambdah*(Rh(i)+(K2_Rh(i)/2))));
    K3_Sv(i) = h*(b2-
(gammav*(Sv(i)+(K2_Sv(i)/2)))-
(beta3*(Sv(i)+(K2_Sv(i)/2))*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2)
)));
    K3_Iv(i) =
h*((beta3*(Sv(i)+(K2_Sv(i)/2))*(Ih(i)+(K2_Ih(i)
/2)))+(muh*(Iv(i)+(K2_Iv(i)/2)))-
(gammav*(Iv(i)+(K2_Iv(i)/2)))-
(deltav*(Iv(i)+(K2_Iv(i)/2))));

    K4_Sh(i) = h*(b1-(muh*(Sh(i)+K3_Sh(i)))-
(beta2*(Sh(i)+K3_Sh(i))*(Iv(i)+K3_Iv(i)))-
(beta1*(Sh(i)+K3_Sh(i))*(Ih(i)+K3_Ih(i)))+(lamb
dah*(Rh(i)+K3_Rh(i))));
    K4_Ih(i) =
h*((beta2*(Sh(i)+K3_Sh(i))*(Iv(i)+K3_Iv(i)))+(b
eta1*(Sh(i)+K3_Sh(i))*(Ih(i)+K3_Ih(i)))-
(muh*(Ih(i)+K3_Ih(i)))-
(deltah*(Ih(i)+K3_Ih(i)))-
(gammah*(Ih(i)+K3_Ih(i))));
    K4_Rh(i) = h*((gammah*(Ih(i)+K3_Ih(i)))-
(muh*(Rh(i)+K3_Rh(i)))-
(lambdah*(Rh(i)+K3_Rh(i))));
    K4_Sv(i) = h*(b2-(gammav*(Sv(i)+K2_Sv(i)))-
(beta3*(Sv(i)+K2_Sv(i))*(Ih(i)+K3_Ih(i))));
    K4_Iv(i) =
h*((beta3*(Sv(i)+K2_Sv(i))*(Ih(i)+K3_Ih(i)))+(m
uh*(Iv(i)+K3_Iv(i)))-
(gammav*(Iv(i)+K3_Iv(i)))-
(deltav*(Iv(i)+K3_Iv(i))));

    Sh(i+1) = Sh(i) + (1/6)*(K1_Sh(i) +
2*K2_Sh(i) + 2*K3_Sh(i) + K4_Sh(i));
    Ih(i+1) = Ih(i) + (1/6)*(K1_Ih(i) +
2*K2_Ih(i) + 2*K3_Ih(i) + K4_Ih(i));
    Rh(i+1) = Rh(i) + (1/6)*(K1_Rh(i) +
2*K2_Rh(i) + 2*K3_Rh(i) + K4_Rh(i));

```



```

        Sv(i+1) = Sv(i) + (1/6)*(K1_Sv(i) +
        2*K2_Sv(i) + 2*K3_Sv(i) + K4_Sv(i));
        Iv(i+1) = Iv(i) + (1/6)*(K1_Iv(i) +
        2*K2_Iv(i) + 2*K3_Iv(i) + K4_Iv(i));
    end

    axes(handles.axes1);
    t = 0:h:N*h;

    plot(t,Sh,'r',t,Ih,'b',t,Rh,'g',
        'LineWidth',2);
    xlabel('Waktu (hari)');
    ylabel('Populasi (juta jiwa)');
    legend('Sh terhadap t','Ih terhadap t','Rh
    terhadap t','FontSize',15);
    grid on

    b1=str2double(get(handles.b1,'String'));
    b2=str2double(get(handles.b2,'String'));
    beta1=str2double(get(handles.beta1,'String'));
    beta2=str2double(get(handles.beta2,'String'));
    beta3=str2double(get(handles.beta3,'String'));
    deltah=str2double(get(handles.deltah,'String'))
    ;
    deltav=str2double(get(handles.deltav,'String'))
    ;
    gammah=str2double(get(handles.gammah,'String'))
    ;
    gammav=str2double(get(handles.gammav,'String'))
    ;
    lambdah=str2double(get(handles.lambdah,'String'
    ));
    muh=str2double(get(handles.muh,'String'));
    muv=str2double(get(handles.muv,'String'));
    Q1=deltav+gammav-muv;
    Q2=muh+deltah+gammah;
    Q3=muh+lambdah;
    R_0=((b1*beta1)/(muh*Q2))+((b1*b2*beta2*beta3)/
    (Q1*Q2*gammav*muh));

```

```

a=beta1*beta3*Q1*Q2;
b=(beta1*Q1*Q2*gammaav)+(b2*beta2*beta3*Q2)+(bet
a3*Q1*Q2*muh)-(b1*beta1*beta3*Q1);
c=(Q1*Q2*muh*gammaav)*(1-R_0);

if(R_0<1)
    sht=b1/muh;
    iht=0;
    rht=0;
    set(handles.Sht,'string',sht);
    set(handles.Iht,'string',iht);
    set(handles.Rht,'string',rht);
    set(handles.R0b,'string',R_0);
end
if (R_0>1)
    if (b^2-4*a*c>0)
        Ihstar_1=(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/2*a;
        Ihstar_2=(-b+sqrt(b^2-4*a*c))/2*a;

        sht1=(Q1*Q2*(gammaav+(beta3*Ihstar_1)))/((b2*bet
a2*beta3)+(beta1*Q1*(gammaav+(beta3*Ihstar_1))))
        ;
        sht2=(Q1*Q2*(gammaav+(beta3*Ihstar_2)))/((b2*bet
a2*beta3)+(beta1*Q1*(gammaav+(beta3*Ihstar_2))))
        ;
        iht1=Ihstar_1;
        iht2=Ihstar_2;
        rht1=(gammaah*Ihstar_1)/Q3;
        rht2=(gammaah*Ihstar_2)/Q3;
        set(handles.Sht1,'string',sht1);
        set(handles.Iht1,'string',iht1);
        set(handles.Rht1,'string',rht1);
        set(handles.Sht2,'string',sht2);
        set(handles.Iht2,'string',iht2);
        set(handles.Rht2,'string',rht2);
        set(handles.R0,'string',R_0);
    end
    if (b^2-4*a*c==0)

```

```

Ihstar_1=(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/2*a;
Ihstar_2=Ihstar_1;

sht1=(Q1*Q2*(gammav+(beta3*Ihstar_1)))/((b2*beta
a2*beta3)+(beta1*Q1*(gammav+(beta3*Ihstar_1))))
;

sht2=(Q1*Q2*(gammav+(beta3*Ihstar_2)))/((b2*beta
a2*beta3)+(beta1*Q1*(gammav+(beta3*Ihstar_2))))
;

iht1=Ihstar_1;
iht2=Ihstar_2;
rht1=(gammah*Ihstar_1)/Q3;
rht2=(gammah*Ihstar_2)/Q3;
set(handles.Sht1,'string',sht1);
set(handles.Iht1,'string',iht1);
set(handles.Rht1,'string',rht1);
set(handles.Sht2,'string',sht2);
set(handles.Iht2,'string',iht2);
set(handles.Rht2,'string',rht2);
set(handles.R0,'string',R_0);
end
if (b^2-4*a*c<0)
sht=b1/muh;
iht=0;
rht=0;
set(handles.Sht,'string',sht);
set(handles.Iht,'string',iht);
set(handles.Rht,'string',rht);
set(handles.R0b,'string',R_0);
end
end

```

LAMPIRAN C

Grafik Persebaran Populasi *Vector*

```

b1=str2double (get (handles.b1, 'String'));
b2=str2double (get (handles.b2, 'String'));
beta1=str2double (get (handles.beta1, 'String'));
beta2=str2double (get (handles.beta2, 'String'));
beta3=str2double (get (handles.beta3, 'String'));
deltah=str2double (get (handles.deltah, 'String'))
;
deltav=str2double (get (handles.deltav, 'String'))
;
gammah=str2double (get (handles.gammah, 'String'))
;
gammav=str2double (get (handles.gammav, 'String'))
;
muh=str2double (get (handles.muh, 'String'));
muv=str2double (get (handles.muv, 'String'));
Q1=deltav+gammav-muv;
Q2=muh+deltah+gammah;
R_0=((b1*beta1)/(muh*Q2))+((b1*b2*beta2*beta3)/(
(Q1*Q2*gammav*muh)));
a=beta1*beta3*Q1*Q2;
b=(beta1*Q1*Q2*gammav)+(b2*beta2*beta3*Q2)+(bet
a3*Q1*Q2*muh)-(b1*beta1*beta3*Q1);
c=(Q1*Q2*muh*gammav)*(1-R_0);
if (R_0<1)
    svt=b2/gammav;
    ivt=0;
    set (handles.Svt, 'string',svt);
    set (handles.Ivt, 'string',ivt);
    set (handles.R0, 'string',R_0);
end
if (R_0>1)
    if (b^2-4*a*c>0)
        Ihstar_1=(-b-sqrt (b^2-4*a*c))/2*a;
        Ihstar_2=(-b+sqrt (b^2-4*a*c))/2*a;
        svt1=b2/(gammav+(beta3*Ihstar_1));
    
```



```

ivt1=(beta3*b2*Ihstar_1)/(Q1*(gammav+(beta3*Ihs
tar_1)));
    svt2=b2/(gammav+(beta3*Ihstar_2));

ivt2=(beta3*b2*Ihstar_2)/(Q1*(gammav+(beta3*Ihs
tar_2)));
    set(handles.Svt1,'string',svt1);
    set(handles.Ivt1,'string',ivt1);
    set(handles.Svt2,'string',svt2);
    set(handles.Ivt2,'string',ivt2);
    set(handles.R0e,'string',R_0);
end
if (b^2-4*a*c==0)
    Ihstar_1=(-b-sqrt(b^2-4*a*c))/2*a;
    Ihstar_2=Ihstar_1;
    svt1=b2/(gammav+(beta3*Ihstar_1));

ivt1=(beta3*b2*Ihstar_1)/(Q1*(gammav+(beta3*Ihs
tar_1)));
    svt2=b2/(gammav+(beta3*Ihstar_2));

ivt2=(beta3*b2*Ihstar_2)/(Q1*(gammav+(beta3*Ihs
tar_2)));
    set(handles.Svt1,'string',svt1);
    set(handles.Ivt1,'string',ivt1);
    set(handles.Svt2,'string',svt2);
    set(handles.Ivt2,'string',ivt2);
    set(handles.R0e,'string',R_0);
end
if (b^2-4*a*c<0)
    sht=b2/gammav;
    iht=0;
    rht=0;
    set(handles.Sht,'string',sht);
    set(handles.Iht,'string',iht);
    set(handles.Rht,'string',rht);
    set(handles.R0b,'string',R_0);
end
end

```

end

```

handles=guidata(gcbo);
Sh(1)=str2double(get(handles.Sh0,'String'));
Ih(1)=str2double(get(handles.Ih0,'String'));
Rh(1)=str2double(get(handles.Rh0,'String'));
Sv(1)=str2double(get(handles.Sv0,'String'));
Iv(1)=str2double(get(handles.Iv0,'String'));
h=str2double(get(handles.h,'String'));
N=str2double(get(handles.N,'String'));
b1=str2double(get(handles.b1,'String'));
b2=str2double(get(handles.b2,'String'));
beta1=str2double(get(handles.beta1,'String'));
beta2=str2double(get(handles.beta2,'String'));
beta3=str2double(get(handles.beta3,'String'));
deltah=str2double(get(handles.deltah,'String'))
;
deltav=str2double(get(handles.deltav,'String'))
;
gammah=str2double(get(handles.gammah,'String'))
;
gammav=str2double(get(handles.gammav,'String'))
;
lambdah=str2double(get(handles.lambdah,'String'
));
muh=str2double(get(handles.muh,'String'));
muv=str2double(get(handles.muv,'String'));

N=96;
for i=1:N

    Sh(1)>=0;
    Ih(1)>=0;
    Rh(1)>=0;
    Sv(1)>=0;
    Iv(1)>=0;

    K1_Sh(i) = h*(b1-(muh*Sh(i))-
(beta2*Sh(i)*Iv(i))-
(beta1*Sh(i)*Ih(i))+(lambdah*Rh(i)));

```

```

K1_Ih(i) =
h*((beta2*Sh(i)*Iv(i))+(beta1*Sh(i)*Ih(i))-
(mu*Sh(i))-(delta*Ih(i))-(gamma*Ih(i)));
K1_Rh(i) = h*((gamma*Ih(i))-(mu*Rh(i))-
(lambda*Rh(i)));
K1_Sv(i) = h*(b2-(gamma*Sv(i))-
(beta3*Sv(i)*Ih(i)));
K1_Iv(i) =
h*((beta3*Sv(i)*Ih(i))+(mu*Iv(i))-
(gamma*Iv(i))-(delta*Iv(i)));

K2_Sh(i) = h*(b1-
(mu*(Sh(i)+(K1_Sh(i)/2)))-
(beta2*(Sh(i)+(K1_Sh(i)/2))*(Iv(i)+(K1_Iv(i)/2)))-
(beta1*(Sh(i)+(K1_Sh(i)/2))*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2)))-
(lambda*(Rh(i)+(K1_Rh(i)/2)));
K2_Ih(i) =
h*((beta2*(Sh(i)+(K1_Sh(i)/2))*(Iv(i)+(K1_Iv(i)/2)))+
(beta1*(Sh(i)+(K1_Sh(i)/2))*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2)))-
(mu*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2)))-
(delta*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2)))-
(gamma*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2))));
K2_Rh(i) =
h*((gamma*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2)))-
(mu*(Rh(i)+(K1_Rh(i)/2)))-
(lambda*(Rh(i)+(K1_Rh(i)/2))));
K2_Sv(i) = h*(b2-
(gamma*(Sv(i)+(K1_Sv(i)/2)))-
(beta3*(Sv(i)+(K1_Sv(i)/2))*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2))));
K2_Iv(i) =
h*((beta3*(Sv(i)+(K1_Sv(i)/2))*(Ih(i)+(K1_Ih(i)/2)))+
(mu*(Iv(i)+(K1_Iv(i)/2)))-
(gamma*(Iv(i)+(K1_Iv(i)/2)))-
(delta*(Iv(i)+(K1_Iv(i)/2))));

K3_Sh(i) = h*(b1-
(mu*(Sh(i)+(K2_Sh(i)/2)))-

```

```

(beta2*(Sh(i)+(K2_Sh(i)/2))*(Iv(i)+(K2_Iv(i)/2)
))-
(beta1*(Sh(i)+(K2_Sh(i)/2))*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2)
))+(lambdah*(Rh(i)+(K2_Rh(i)/2))));
    K3_Ih(i) =
h*((beta2*(Sh(i)+(K2_Sh(i)/2))*(Iv(i)+(K2_Iv(i)
/2)))+(beta1*(Sh(i)+(K2_Sh(i)/2))*(Ih(i)+(K2_Ih
(i)/2)))-(muh*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2)))-
(deltah*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2)))-
(gammah*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2))));
    K3_Rh(i) =
h*((gammah*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2)))-
(muh*(Rh(i)+(K2_Rh(i)/2)))-
(lambdah*(Rh(i)+(K2_Rh(i)/2))));
    K3_Sv(i) = h*(b2-
(gammav*(Sv(i)+(K2_Sv(i)/2)))-
(beta3*(Sv(i)+(K2_Sv(i)/2))*(Ih(i)+(K2_Ih(i)/2)
)));
    K3_Iv(i) =
h*((beta3*(Sv(i)+(K2_Sv(i)/2))*(Ih(i)+(K2_Ih(i)
/2)))+(muh*(Iv(i)+(K2_Iv(i)/2)))-
(gammav*(Iv(i)+(K2_Iv(i)/2)))-
(deltav*(Iv(i)+(K2_Iv(i)/2))));

    K4_Sh(i) = h*(b1-(muh*(Sh(i)+K3_Sh(i)))-
(beta2*(Sh(i)+K3_Sh(i))*(Iv(i)+K3_Iv(i)))-
(beta1*(Sh(i)+K3_Sh(i))*(Ih(i)+K3_Ih(i)))+(lamb
dah*(Rh(i)+K3_Rh(i))));
    K4_Ih(i) =
h*((beta2*(Sh(i)+K3_Sh(i))*(Iv(i)+K3_Iv(i)))+(b
eta1*(Sh(i)+K3_Sh(i))*(Ih(i)+K3_Ih(i)))-
(muh*(Ih(i)+K3_Ih(i)))-
(deltah*(Ih(i)+K3_Ih(i)))-
(gammah*(Ih(i)+K3_Ih(i))));
    K4_Rh(i) = h*((gammah*(Ih(i)+K3_Ih(i)))-
(muh*(Rh(i)+K3_Rh(i)))-
(lambdah*(Rh(i)+K3_Rh(i))));
    K4_Sv(i) = h*(b2-(gammav*(Sv(i)+K2_Sv(i)))-
(beta3*(Sv(i)+K2_Sv(i))*(Ih(i)+K3_Ih(i))));

```



```

K4_Iv(i) =
h*((beta3*(Sv(i)+K2_Sv(i))*(Ih(i)+K3_Ih(i)))+(m
uh*(Iv(i)+K3_Iv(i)))-(gammav*(Iv(i)+K3_Iv(i)))-
(deltav*(Iv(i)+K3_Iv(i))));

Sh(i+1) = Sh(i) + (1/6)*(K1_Sh(i) +
2*K2_Sh(i) + 2*K3_Sh(i) + K4_Sh(i));
Ih(i+1) = Ih(i) + (1/6)*(K1_Ih(i) +
2*K2_Ih(i) + 2*K3_Ih(i) + K4_Ih(i));
Rh(i+1) = Rh(i) + (1/6)*(K1_Rh(i) +
2*K2_Rh(i) + 2*K3_Rh(i) + K4_Rh(i));
Sv(i+1) = Sv(i) + (1/6)*(K1_Sv(i) +
2*K2_Sv(i) + 2*K3_Sv(i) + K4_Sv(i));
Iv(i+1) = Iv(i) + (1/6)*(K1_Iv(i) +
2*K2_Iv(i) + 2*K3_Iv(i) + K4_Iv(i));
end

axes(handles.axes1);
t = 0:h:N*h;

plot(t,Sv,'r',t,Iv,'b','LineWidth',2);
xlabel('Waktu (hari)');
ylabel('Populasi (juta jiwa)');
legend('Sv terhadap t','Iv terhadap
t','FontSize',15);
grid on

```

LAMPIRAN D

Tampilan Awal Program



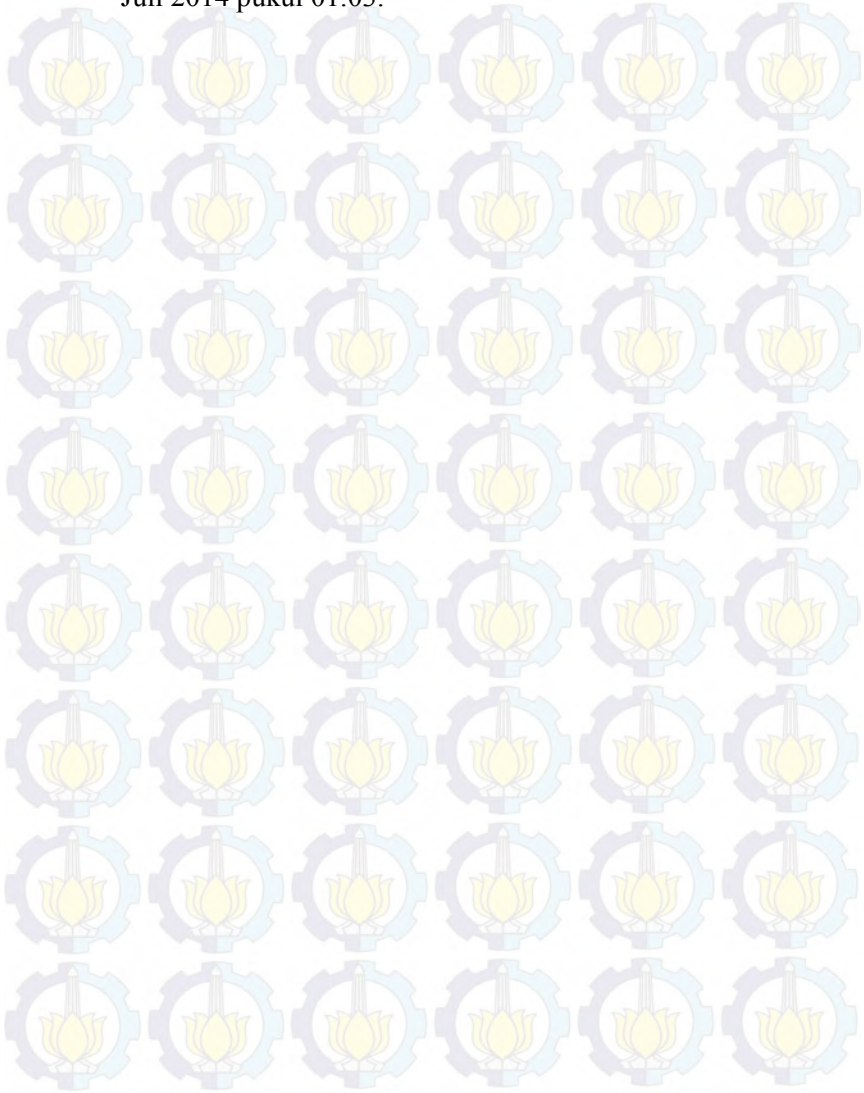
Gambar D1. *Simulasi Kurva Bifurkasi*



DAFTAR PUSTAKA

- [1] Anonim. 2014. "Leptospirosis". (<http://id.wikipedia.org/wiki/Leptospirosis>, diakses pada tanggal 4 Februari 2014 pukul 17:07).
- [2] Zaman, G., Khan, M.A., Islam, S., Chohan, M.I., Jung, I.H. 2012. "*Modeling Dynamical Interaction between Leptospirosis Infected Vector and Human Population*". **Applied Mathematical Sciences**, Vol. 6, 2012, no. 26, 1287-1302.
- [3] Anonim. 2014. "Bab II Tinjauan Pustaka". (<http://digilib.unimus.ac.id/disk1/133/>), diakses pada tanggal 5 Februari 2014 pukul 05.28).
- [4] Pramesthi, S.R.P.W. 2007. "*Analisis pada Model Penyebaran Penyakit Tuberkolosis*". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya**.
- [5] Kasanah, N.R. 2014. "*Analisa Kualitatif pada Model Penyakit Parasitosis*". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya**.
- [6] Wulansari, N. 2014. "*Analisis Kestabilan pada Model Epidemik Dengan Transmisi Vertika dan Penyelesaian Numerik Metode Runge-Kutta*". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya**.
- [7] Iswahyuni, N. 2013. "*Analisa Kualitatif pada Model Epidemik SIS dengan Pengobatan*". **Tugas Akhir S1 Jurusan Matematika ITS Surabaya**.
- [8] Lestari, D. 2013. "Diktat Persamaan Diferensial". **Jurusan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta**.
- [9] Anonim. 2014. "Penyelesaian Persamaan Diferensial". (<http://lecturer.eepis->

its.edu/~alfaruqi/mnumerik/bab7tm.pdf), diakses pada 23
Juli 2014 pukul 01.03.



BIODATA PENULIS



Fahmi Mutiara Yashinta, biasa dipanggil Fahmi, lahir di Surabaya, tanggal 19 Juni 1992. Penulis mengambil rumpun Permodelan dan Simulasi Sistem Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Adapun sebelum menduduki bangku perkuliahan, penulis bersekolah di TK Wachid Hasyim, SD Negeri Rungkut Kidul I-267, SMP Negeri 2 Candi, dan SMA Negeri 1 Sidoarjo. Ketika menginjak bangku SMA, penulis pernah meraih penghargaan *Australian Nasional Chemistry Quiz* dengan nilai *High Districction*. Penulis juga memiliki beberapa pengalaman di bidang pendidikan, yaitu mengajar adik kelas PRAMUKA saat di bangku SMP dan SMA, serta menjadi guru les di sebuah LBB. Selain itu, penulis juga mempunyai pengalaman di bidang organisasi, diantaranya menjadi anggota Tim Pembina PRAMUKA pada saat SMP, Anggota Sie Kerohanian Islam dan PMR pada saat SMA, staff HIMATIKA ITS dan staff BEM FMIPA ITS pada tahun 2011-2012, serta Ketua Departemen Dalam Negeri BEM FMIPA ITS pada tahun 2012-2013, dan Sekretaris Kementerian Kesejahteraan Mahasiswa BEM ITS pada tahun 2013-2014. Penulis juga pernah Kerja Praktek di Laboratorium Balai Besar Pelaksanaan Jalan Nasional V. Jika ingin memberikan saran, kritik, dan diskusi tentang Tugas Akhir ini, silahkan menghubungi email fmymie19@gmail.com. Semoga apa yang dituliskan dalam Tugas Akhir ini bisa bermanfaat untuk kita semua. Amin.